SS 2007 | Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch | Fakultät II
Dr. Daniel Wachsmuth | Institut für Mathematik

3. Übungsblatt Analysis I

1.Mai: Am 1. Mai ist keine große Übung.

Hausaufgaben: Erfolgt die Abgabe nicht in Zweiergruppen, gibt es **Punktabzüge** (mindestens 50%)!

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 02.5.07 bis 04.5.07 besprochen]

1. Es sei f eine Abbildung von A auf B, $f : A \to B$, und es sei $U \subset A$, $V \subset A$, $C \subset B$, $D \subset B$. Dann gilt:
   (a) $U \subset f^{-1}(f(U))$, $f(f^{-1}(D)) \subset D$,
   (b) $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$, $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
2. Gegeben sind zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$. Zeigen Sie: Sind f und g surjektiv (injektiv, bijektiv), dann ist $g \circ f$ surjektiv (injektiv, bijektiv).
3. (a) Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ abzählbar ist.
   (b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ überabzählbar ist.
   (c) Zeigen Sie, dass die Menge aller Polynome mit rationalen Koeffizienten abzählbar ist.
4. Geben Sie eine Bijektion an zwischen den folgenden Mengen:
   (a) $[a, b]$ und $[c, d]$ $(a < b, c < d)$,
   (b) $]-\infty, \infty[$ und $]0, 1[$,
   (c) $]0, 1]$ und $[0, 1[$,
   (d) $[0, 1]$ und $]0, 1]$.

Hausaufgaben: [abgeben am 08.5.07 10:15]

1. Mit den selben Bezeichnungen wie in Tutoriumsaufgabe 1 beweisen Sie (4 Punkte)
   $f(U \cap V) \subset f(U) \cap f(V)$ und $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
   Geben Sie ein Gegenbeispiel an, dass die Inklusion $f(U \cap V) \supset f(U) \cap f(V)$ im Allgemeinen nicht gilt.
2. Es sind zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ gegeben. Beweisen Sie: (3 Punkte)
   (a) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv,
   (b) $g \circ f$ injektiv und f surjektiv $\Rightarrow$ g injektiv.
   (c) Es sei $C = A$ also $g : B \to A$. Weiter gelte $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$. Zeigen Sie, dass f und g Bijektionen sind.
3. (7 Punkte)
   (a) Zeigen Sie: Ist p ein Polynom mit reellen Koeffizienten und die Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p, dann ist auch $\bar{z} = x - iy$ eine Nullstelle von p.
   (b) Beweisen Sie, dass jedes reelle Polynom von ungeradem Grad mindestens eine reelle Nullstelle hat.
   (c) Bestimmen Sie alle Polynome 5. Grades mit reellen Koeffizienten, die die Nullstellen 0, i, $i + 1$ haben.