SS 2007 Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch Fakultät II
Dr. Daniel Wachsmuth Institut für Mathematik

5. Übungsblatt Analysis I

Hausaufgaben: Abgabe spätestens am 22.5.07 um 10:15 in der großen Übung.

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 15.5.07 besprochen]

1. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ ist abgeschlossen genau dann, wenn gilt: Für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Gliedern $a_n \in A\ \forall n$ liegt auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in A.
2. Die Vereinigung abzählbarer vieler offener Mengen ist offen. Der Durchschnitt abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.
3. Zu zeigen ist, dass gilt $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Berechnen Sie damit $\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{x}$ für $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 16.5.07 bis 18.5.07 besprochen]

1. Man entscheide, ob folgende Mengen $M \subset \mathbb{R}$ nach oben bzw. unten beschränkt sind und bestimme ggfalls. das Supremum und Infimum. Weiter entscheide man, ob M ein Maximum oder Minimum besitzt.

   (a) $M = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 10\}$, (b) $M = \{x \in \mathbb{R} : x^3 < 27\}$ (c) $M = \{\frac{x}{1+x} : x > -1,\ x \in \mathbb{R}\}$,

   (d) $M = \{x : x = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\}$, (e) $M = \{x : x = \left(-\frac{1}{2}\right)^m - \frac{3}{n+7},\ n, m \in \mathbb{N}\}$.
2. Es seien zwei Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Es sei $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist b ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dann gilt $\limsup a_n = b$. Insbesondere ist $\limsup a_n$ endlich.
3. Berechnen Sie den $\liminf a_n$ und $\limsup a_n$ der untenstehenden Folgen!

   (a) $a_n = 1 + (-1)^n$, (b) $a_n = (-1)^n(2 + \frac{3}{n})$, (c) $a_n = (-1)^n n$,

   (d) $a_n = \frac{n+(-1)^n(2n+1)}{n}$, (e) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$.

Hausaufgaben: [abgeben am 22.5.07 10:15]

1. Sei $A \subset \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von A. Zeigen Sie, dass dann eine Folge von Elementen aus $A \setminus \{x_0\}$ existiert, die gegen x_0 konvergiert. (1 Punkte)
2. Die folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen nicht! Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an mit Begründung! (2 Punkte)
   (a) Der Durchschnitt abzählbarer vieler offener Mengen ist offen.
   (b) Die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.
3. Beweisen oder widerlegen Sie: Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ beschränkte Mengen. Dann gilt (4 Punkte)
   (a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ mit $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$,
   (b) $\sup(A \cdot B) = \sup(A)\sup(B)$ mit $A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$.
4. Berechnen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe von Übungsaufgabe 3. Die Funktionen sin, cos und tan werden als stetig in $x = 0$ vorausgesetzt. (5 Punkte)

   Achtung: Die l'Hospitalsche Regel darf nicht verwendet werden!

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$, $m, n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$, $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{\sin 3x}{\tan 5x}$,
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$,
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.