SS 2007 | Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch | Fakultät II
Dr. Daniel Wachsmuth | Institut für Mathematik

6. Übungsblatt Analysis I

Hausaufgaben: Abgabe spätestens am 29.5.07 um 10:15 in der großen Übung.

Klausur: Die Klausur findet am 18.7. um 12:00 im Hörsaal ER270 statt.

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 22.5.07 besprochen]
Wir untersuchen die folgenden Funktionen auf Stetigkeit.

1. Die Gauß- oder Entierfunktion: $[x] := \sup\{y \in \mathbb{Z} : \ y \le x\}$.
2. Die Dirichletfunktion $D(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$
3. Die Riemannfunktion $R(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ oder } x = 0, \\ \frac{1}{n} & \text{falls } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}. \end{cases}$

   Dabei soll der Bruch $\frac{m}{n}$ schon so weit wie möglich gekürzt sein, also m und n teilerfremd sein.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 23.5.07 bis 25.5.07 besprochen]

1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit in den natürlichen Definitionsgebieten! Lassen sich in Punkten außerhalb des Definitionsbereiches Funktionswerte definieren, so dass die Stetigkeit auch dort gewährleistet ist?

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, (b) $f(x) = 2 - \dfrac{x}{|x|}$, (c) $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$,
   (d) $f(x) = \dfrac{|1+x|}{|1-x|}$, (e) $f(x) = \dfrac{x^7 - 37x^4 + x}{x^3 + x}$,
   (f) $f(x) = x - [x]$,
   (g) $f(x) = [x] + \sqrt{x + [x]}$, (h) $f(x) = xD(x)$,

Hausaufgaben: [abgeben am 29.5.07 10:15]
Wir setzen hier voraus, dass die Funktionen sin und tan stetig auf ihrem Definitionsgebiet sind.

1. Was ist der maximale Definitionsbereich in $\mathbb{R}$ der folgenden Funktionen? Sind diese dort stetig? (6 Punkte)

   (e) $f(x) = x[x^{-1}]$, (h) $f(x) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, (z) $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,

2. Es sei $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von a ist die Funktion f, definiert als (2 Punkte)

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } x \ge 0, \\ -g(-x) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

   stetig auf ganz $\mathbb{R}$?

3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte! Geben Sie explizit an, wo Sie Stetigkeitseigenschaften verwenden. (4 Punkte)

   (a) $\lim\limits_{x \to \pi} \sin[x]$, (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$, (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(R(x))^2}{x}$, (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4. Beweisen oder Widerlegen Sie: Die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ gegeben durch (2 Punkte)

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x < \sqrt{2} \\ 0, & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

   ist stetig auf ganz $\mathbb{Q}$.