SS 2007 | Technische Universität Berlin
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch | Fakultät II
Dr. Daniel Wachsmuth | Institut für Mathematik

7. Übungsblatt Analysis I

Hausaufgaben: Abgabe spätestens am 05.6.07 um 10:15 in der großen Übung.

Klausur: Die Klausur findet am 18.7. um 12:00 im Hörsaal ER270 statt.

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 29.5.07 besprochen]

1. Gleichmäßige Stetigkeit:
   (a) Die Funktion $f : \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $\mathbb{R}_+$. Dann gilt: Falls $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existiert, dann ist f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}_+$.
   (b) Die Umkehrung gilt nicht, denn die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}_+$, aber $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}$ existiert nicht.

2. Anwendungen des Zwischenwertsatzes:
   (a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $x + 2^x = 0$ mindestens eine Lösung in $\mathbb{R}$ hat.
   (b) Wir untersuchen nun die Temperaturverteilung $\theta(\phi)$ entlang des Äquators, ϕ sei der Längengrad mit $\phi \in [-\pi, \pi]$. Wir nehmen an, dass der Temperaturverlauf stetig vom Längengrad abhängt. Nach dem Satz von Weierstraß werden die Maximaltemperatur θ_{max} und die Minimaltemperatur θ_{min} angenommen auf $[-\pi, \pi[$.
      i. Wir können θ auf ganz $\mathbb{R}$ 2π-periodisch und stetig fortsetzen.
      ii. Zeigen Sie, dass jeder Wert aus $]\theta_{min}, \theta_{max}[$ der Funktionswert von mindestens zwei verschiedenen Winkeln ϕ_1 und ϕ_2 ($\phi_1, \phi_2 \in [-\pi, \pi[$, $\phi_1 \neq \phi_2$) ist.
      iii. Weiter gilt: Es gibt mindestens einen Ort ϕ_1 auf dem Äquator, an dem die selbe Temperatur herrscht wie in dem Ort $\phi_1 + \pi$ 'genau gegenüber'.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 30.5.07 bis 01.6.07 besprochen]

1. Man beweise die Produktregel für die Differentiation.

2. Bestimmen Sie (falls möglich) die 1. Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe des Differenzenquotienten:

   (a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{falls } x \leq 1 \\ x^2 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$, (b) $f(x) = |x^3 + 1|$.

3. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen auf ihrem natürlichen Definitionsgebiet:

   (a) $e^x(x^2 - 2x + 2)$, (b) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}}$, (c) $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$,
   (d) x^x, (e) $x^{\sin x}$,

4. Berechnen Sie die erste Ableitung von $y(x) = u(x)^{v(x)}$. Dabei seien u, v differenzierbar, $u(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

5. Für welche reelle Zahlen α, β ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|^\beta} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   im Punkt $x = 0$ differenzierbar? Wann ist die erste Ableitung in $x = 0$ stetig?

Hausaufgaben: [abgeben am 05.6.07 10:15]

1. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig auf der Menge D. Weiterhin existieren Konstanten $C > 0$, $\alpha > 0$, so dass für alle $x, y, \in D$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$. (1 Punkt)

   Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

2. Die Funktion $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x) = \begin{cases} a \in \mathbb{R} & \text{falls } x = 0 \\ \frac{1}{\ln x} & \text{falls } x \neq 0 \end{cases}$.

   (2 Punkte)

   (a) Berechnen Sie a, damit f stetig auf $[0, 1/2]$ ist.

   (b) Beweisen Sie, dass f gleichmäßig stetig auf $[0, 1/2]$ ist.

   (c) (1 Zusatzpunkt) Zeigen Sie, dass f die Voraussetzungen aus Hausaufgabe 1 nicht erfüllt.

3. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen auf ihrem natürlichen Definitionsgebiet: (6 Punkte)

   (a) $\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$, $m, n > 0$, (b) $2^{\sin 3x}$, (c) $a^{(a^x)}$, $a > 0$

   (d) $x^{(x^{(x^x)})}$, (e) $\frac{(1+x)e^x}{2+x^2}$, (f) $\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$,

4. Sind die folgenden Funktionen im Punkt $x = 0$ differenzierbar? Berechnen Sie gegebenenfalls $f'(0)$. (5 Punkte)

   (a) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & x < 0 \\ x^2 + x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$