SS 2007
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Dr. Daniel Wachsmuth

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

8. Übungsblatt Analysis I

Hausaufgaben: Abgabe spätestens am 12.6.07 um 10:15 in der großen Übung.

Klausur: Die Klausur findet am 18.7. um 12:00 im Hörsaal ER270 statt.

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 05.6.07 besprochen]

1. Satz von Rolle: Sei f eine auf $[a,b]$ stetige Funktion und differenzierbar auf $]a,b[$. Gilt $f(a) = f(b)$, dann existiert $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.
   (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rolle, dass die Funktion $x^n + ax + b$ für gerades n höchstens zwei und für ungerades n höchstens drei Nullstellen besitzt.
   (b) Sei $c_0 + \dfrac{c_1}{2} + ... + \dfrac{c_n}{n+1} = 0$. Beweisen Sie, daß die Gleichung $c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n = 0$ im Intervall (0,1) mindestens eine Lösung hat.
2. Geben Sie mit Hilfe des Schrankensatzes möglichst genaue Intervalle für die nachstehenden Werte an !
   (a) $\sqrt{1850}$ ($\sqrt{1849} = 43$)
   (b) $\sin 35^o$ ($\sin 30^o = 0.5$)
   (c) $e^{0.01}$ ($e^0 = 1$)

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 06.6.07 bis 08.6.07 besprochen]

1. Beweisen Sie mithife des Monotoniekriteriums die folgenden Ungleichungen:
   (a) $2\sqrt{x} \geq 3 - \frac{1}{x}$, $x \geq 1$,
   (b) $e^x \geq x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der folgenden Funktionen auf den angegebenen Intervallen. Wo liegen lokale bzw. globale Extremstellen vor?
   (a) $f(x) = x - \ln(1 + x)$, $x > -1$,
   (b) $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$,
   (c) $f(x) = \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{1-x}$, $x \in]0, 1[$,
   (d) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, $x \in [-10, 10]$.
3. Zeigen Sie: die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sinh x$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist gegeben durch $\operatorname{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Hausaufgaben: [abgeben am 12.6.07 10:15]

1. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sei stetig auf der Menge D. Weiterhin existieren Konstanten $C > 0$, $\alpha > 1$, so dass für alle $x, y, \in D$ gilt $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$. (1 Punkt)
   Zeigen Sie, dass f konstant ist.
2. Beweisen Sie, dass für $x > -1$ die Ungleichung $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1 + x) \leq x$ gilt. (3 Punkte)
3. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gelte $f(a) \geq f(x)$ für alle $x > a$. Zeigen Sie, dass dann $f'(a) \leq 0$ ist. (2 Punkte)
4. Zeigen Sie, dass $\tanh : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ bijektiv ist und die Umkehrfunktion $\operatorname{Artanh} = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ besitzt. (2 Punkte)
5. Berechnen Sie die Extremwerte (Maximum/Minimum) der folgenden Funktionen auf den angegebenen Intervallen! Begründen Sie mit dem Monotonieverhalten, dass die gefundenen Punkte Maximum (Minimum) sind. (6 Punkte)
   (a) $f(x) = xe^{-2x^2}$, $x \in [-15, 15]$,
   (b) $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 18$, $x \in [-2, 2]$.