SS 2007
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Dr. Daniel Wachsmuth

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

10. Übungsblatt Analysis I

Hausaufgaben: Abgabe spätestens am 26.6.07 um 10:15 in der großen Übung.

Übungsblätter: Es wird 13 Übungsblätter und 12 (?) Hausaufgaben geben.

Klausur: Die Klausur findet am 18.7. um 12:00 im Hörsaal ER270 statt.

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 19.6.07 besprochen]

1. Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 bis zur Potenz $(x-x_0)^n$ mit Hilfe des Taylorschen Satzes und geben Sie das Restglied an.
   (a) $f(x) = \sin 3x$, $x_0 = 1$, $n = 3$,
   (b) $f(x) = 3x^5 + 2x^3 + x^2 + 2$, $x_0 = 0$, $n \geq 5$,
   (c) $f(x) = e^{1-x}$, $x_0 = 1$, $n = 4$,
   (d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$, $n = 4$.
2. Beweisen Sie die Näherungsformel $\tan x \approx x + \frac{x^3}{3}$ und schätzen Sie den absoluten Fehler für $|x| \leq 0.1$ ab.
3. Es gilt $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$. Wieviel Summanden der arctan-Reihe muß man jeweils berücksichtigen, um die ersten sechs Dezimalen von $\arctan\frac{1}{5}$ bzw. von $\arctan\frac{1}{239}$ zu bestimmen. Wieviel Stellen in der Dezimalentwicklung von $\frac{\pi}{4}$ sind damit gesichert?

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 20.6.07 bis 22.6.07 besprochen]

1. Entwickeln Sie die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 bis zur Potenz $(x-x_0)^n$ mit Hilfe des Taylorschen Satzes und geben Sie das Restglied an !
   a) $f(x) = e^{1-x},\ x_0 = 0,\ n = 3$ b) $f(x) = \sqrt{1+x},\ x_0 = 3,\ n = 3$
   c) $f(x) = \ln(2+x),\ x_0 = 1,\ n = 3$
2. Bestimmen Sie zu $f : [-2, 0.5]$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, das n-te Taylorpolynom T_n im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von $f(x) - T_n(x)$ für $n \to \infty$.
3. Beweisen Sie die Formel von de Moivre:
   $$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx.$$
   Berechnen Sie daraus $\cos 3x$ und $\sin 3x$.
4. Beweisen Sie
   $$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hausaufgaben: [abgeben am 26.6.07 10:15]

1. Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. Was folgt daraus für $\arctan x$ und $\arctan\frac{1}{x}$? (2 Punkte)
2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Es sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Weiter sind n Punkte $x_1 \ldots x_n \in \mathbb{R}$ gegeben und nichtnegative Zahlen $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$. Zeigen Sie (per Induktion nach n), dass gilt (3 Punkte)
   $$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

Bitte wenden!

3. Folgern Sie aus Satz 189: Sind $s, t \in [0, 2\pi[$, $t < s$ und $\cos t = \cos s$, so folgt $0 < t < \pi$ und $s = 2\pi - t$. (4 Punkte)

4. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)$. Zeigen Sie: (3 Punkte)

   (a) Ist f stetig, dann gilt $f(0) = 0$.

   (b) Ist f n-mal stetig differenzierbar, dann gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle geraden Zahlen $k \leq n$. (Hinweis: Zeigen Sie, dass $f^{(k)}$ für gerades k eine ungerade Funktion ist.)

5. Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = xe^{(x^2)}$ an der Stelle $x_0 = 0$ das Taylorpolynom 3. Grades. Schätzen Sie den Fehler $|f(x) - T_3(x)|$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ ab. (4 Punkte)