SS 2007
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Dr. Daniel Wachsmuth

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

12. Übungsblatt Analysis I

Hausaufgaben: Abgabe spätestens am 10.7.07 um 10:15 in der großen Übung.

Klausur: Die Klausur findet am 18.7. um 12:00 im Hörsaal ER270 statt.

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 03.7.07 besprochen]

Wir haben das Verdichtungskriterium bewiesen:

1. Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge.
   Dann ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ genau dann konvergent, wenn $\sum_{k=1}^\infty 2^k a_{2^k}$ konvergent ist.
2. Damit beweist man, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergent ist.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 04.7.07 bis 06.7.07 besprochen]

1. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(\ln n)^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{n^n}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n+1}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n}{3n+5}$

   g) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (\sqrt[n]{a}-1)^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

2. Es sei $a_n \geq 0$ und $b_n \geq 0$. Beweisen Sie, das aus der Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^\infty a_n^2$ und $\sum\limits_{k=1}^\infty b_n^2$ die Konvergenz von $\sum\limits_{k=1}^\infty a_n b_n$ folgt.

3. Wenn (a_n) eine monoton fallende Nullfolge ist und $\sum\limits_{k=1}^\infty a_n$ konvergiert, dann ist sogar (na_n) eine Nullfolge. Gilt die Umkehrung?

Hausaufgaben: [abgeben am 10.7.07 10:15 - Achtung: letzte Hausaufgabe]

1. Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Existenz. Berechnen Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals. (5 Punkte)

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \sin x\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,dx$

2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. (6 Punkte)

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (\sqrt[n]{n}-1)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^2+1}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2}+\frac{100}{n}\right)^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$

3. Es sei (a_n) eine reelle Folge und (b_n) eine beschränkte Folge. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind. Beweisen Sie ihre Antwort. (3 Punkte)

(a) Falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent ist, so ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent.

(b) Falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent ist, so ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent.

(c) Falls $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent ist, so ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.