Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

Sommersemester 2008
18. Juli 2008

Lösungsskizzen zur Klausur zur Linearen Algebra II

Definitionen

Aufgabe 1 (1+1+1 Punkte)
Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) Charakteristisches Polynom eines Endomorphismus:

Sei V ein K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Sei $M(F)$ eine darstellende Matrix von F. Das charakteristische Polynom von F ist definiert durch:

$P_F(t) = \det(M(F) - t \cdot E)$.

b) Minimalpolynom eines Endomorphismus:

Voraussetzungen wie bei (a). Das Minimalpolynom M_F ist das Polynom kleinsten Grades, welches normiert ist und F annulliert.

c) Fomulieren Sie den Satz von Cayley & Hamilton.

Voraussetzungen wie bei (a) und (b): Sei P_F das charakteristische Polynom von F. Dann gilt $P_F(F) = 0$.

Aufgabe 2 (1+1 Punkte)
Definieren Sie:

a) Orthogonaler Endomorphismus:

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$. Ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ heißt orthogonal, falls für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle F(v), F(w) \rangle = \langle v, w \rangle$.

b) Selbstadjungierter Endomorphismus:

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$. Ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ heißt selbstadjungiert, falls für alle $v, w \in V$ gilt: $\langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle$.

Aussagen

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K V = n < \infty$ und $F \in \mathrm{End}(V)$. Seien M_F das Minimalpolynom und P_F das charakteristische Polynom von F. Kreuzen Sie die richtigen Implikationen bzw. die richtigen Aussagen an.

	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftrightarrow$	
(a) $\lambda = 0$ ist Eigenwert von F	○	⊗	○	F ist nilpotent
(b) F ist diagonalisierbar	⊗	○	○	F^2 ist diagonalisierbar
(c) M_F zerfällt in Linearfaktoren	○	○	⊗	P_F zerfällt in Linearfaktoren
(d) $M_F = P_F$	○	○	⊗	Die Jordannormalform von F hat genau ein Jordankästchen je Eigenwert

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Seien A, B quadratische Matrizen über einem Körper K. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
(a) Ist 0 eine Nullstelle von P_A, dann ist 0 auch Nullstelle von P_{AB}.	⊗	○
(b) Sind $A, B \in O(3)$ und gilt $AB = BA$, so muss $A = B$ sein.	○	⊗
(c) Für $A \in O(n)$ und $B \in SO(n)$ ist $AB \in O(n)$.	⊗	○
(d) Ist A orthogonale Matrix und gilt $A^2 = A$, dann ist A die Einheitsmatrix.	⊗	○

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Kreuzen Sie an:

	wahr	falsch
(e) Sind $\langle .,. \rangle_1$ und $\langle .,. \rangle_2$ zwei Skalarprodukte auf V und ist $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis von V bzgl. $\langle .,. \rangle_1$ und $\langle .,. \rangle_2$, so ist $\langle .,. \rangle_1 = \langle .,. \rangle_2$.	⊗	○
(f) Sind $\langle .,. \rangle_1$ und $\langle .,. \rangle_2$ zwei Skalarprodukte auf V. Ist $\mathcal{B}$ Orthonormalbasis bzgl. $\langle .,. \rangle_1$, dann ist $\mathcal{B}$ auch Orthonormalbasis bzgl. $\langle .,. \rangle_2$.	○	⊗

Aufgaben

Aufgabe 5 (6 Punkte)
$F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ sei gegeben durch

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2z \\ 0 \\ 4z - 2x \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenräume von F.

Bzgl. der kanonischen Basis hat F die darstellende Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$P_A(t) = \det(A - t \cdot E_3) = -t^2(t-5)$. Nullstellen und damit Eigenwerte von F sind also $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 5$.

Berechnung der Eigenräume ergibt: $\mathrm{Eig}(F, 5) = \mathrm{Kern}(A - 5E) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix})$ und $\mathrm{Eig}(F, 0) = \mathrm{Kern}(A - 0E) = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

b) Ist F diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine darstellende Matrix D in Diagonalgestalt und eine dazugehörige Transformationsmatrix S mit $D = S \cdot M(F) \cdot S^{-1}$ an. Wenn nein, warum nicht?

F ist diagonalisierbar, da F selbstadjungiert ist (die darstellende Matrix ist symmetrisch) bzw. weil die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte mit deren algrebraischer Vielfachheit übereinstimmt. Weil F selbstadjungiert ist, gibt es eine ONB aus Eigenvektoren. Dazu muss man obige Vektoren nur noch normieren und wir erhalten als Basis gerade die Spalten von $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Da S^{-1} eine orthogonale Matrix ist, ist $S = (S^{-1})^T$. Offenbar ist $S = (S^{-1})^T = S^{-1}$. Die Diagonalgestalt D ergibt sich dann aus: $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = SAS^{-1}$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)
Bestimmen Sie das Minimalpolynom und die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Hier muss nicht allzu viel gerechnet werden!)

Da A eine untere Dreiecksmatrix ist, ist das charakteristische Polynom von A gerade $P_A(t) = (t-1)^6$. Nach dem Satz von Cayley & Hamilton teilt das Minimalpolynom M_A das charakteristische Polynom. Weil $(A-E)^2 \neq 0$, aber $(A-E)^3 = 0$ gilt, ist $M_A = (t-1)^3$ (s. Definition von M_A aus Aufgabe 1). Damit ist das größte Jordankästchen zum Eigenwert 1 ein 3×3 Kästchen.

Zur Bestimmung der anderen Kästchen benötigen wir die Dimension von $\mathrm{Eig}(A,1)$: Es ist $\mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix}$. Offenbar hat diese Matrix den Rang 2. Somit ist $\dim \mathrm{Eig}(A,1) = \dim \mathrm{Kern}(A-E) = 6-2 = 4$ nach der Dimensionsformel. Also gibt es insgesamt 4 Jordankästchen zum Eigenwert 1 und die Jordansche Normalform hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7 (3 Punkte)
Sei $(V,\langle .,.\rangle)$ ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei $U = \{u_1,\ldots,u_k\}$ eine orthonormale Menge von Vektoren aus V.

Zeigen Sie: Für jeden Vektor $v \in V$ ist

$$w = v - \sum_{i=1}^{k} \langle v, u_i\rangle u_i$$

orthogonal zu jedem u_i.

Beweis: Es ist für jedes $j = 1,\ldots,k$

$$\begin{aligned} \langle w, u_j\rangle &= \langle v - \textstyle\sum_{i=1}^k \langle v,u_i\rangle u_i, u_j\rangle \\ &= \langle v,u_j\rangle - \langle \textstyle\sum_{i=1}^k \langle v,u_i\rangle u_i, u_j\rangle \\ &= \langle v,u_j\rangle - \textstyle\sum_{i=1}^k \langle v,u_i\rangle\langle u_i,u_j\rangle \\ &= \langle v,u_j\rangle - \textstyle\sum_{i=1}^k \langle v,u_i\rangle\delta_{ij} \\ &= \langle v,u_j\rangle - \langle v,u_j\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

a) Zeigen Sie: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonaler Endomorphismen stehen senkrecht aufeinander.

   Beweis: Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ eine orthogonale Abbildung auf einem euklidischen Vektorraum V. Seien λ und μ zwei verschiedene Eigenwerte und und seien v, w dazugehörige Eigenvektoren mit $F(v) = \lambda v$ und $F(w) = \mu w$. Weil F orthogonal ist, gilt dann

   $\langle v,w\rangle = \langle F(v),F(w)\rangle = \langle \lambda v, \mu w\rangle = \lambda\mu\langle v,w\rangle \Longrightarrow (1-\lambda\mu)\langle v,w\rangle = 0$. Weil aber orthogonale Endomorphismen nur ± 1 als Eigenwerte haben können und $\lambda \neq \mu$ gilt, ist $(1-\lambda\mu) \neq 0$. Also folgt $\langle v,w\rangle = 0$.

b) Sei $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$. F habe bezüglich der kanonischen Basis die darstellende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass F eine Geradenspiegelung ist.

Beweis: Wir stellen fest, dass $A^T A = E$ gilt. Also ist A orthogonale Matrix und damit F orthogonaler Endomorphismus auf $\mathbb{R}^2$. Weil $\det A = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$ muss F eine Geradenspiegelung sein.

(Hier sind natürlich auch andere Wege denkbar, z.B. kann man P_F berechnen und feststellen, dass wir die Eigenwerte $+1$ und -1 haben. Weil nach (a) die dazugehörigen Eigenvektoren senkrecht zueinander sind, ist F eine Geradenspiegelung.)