Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

Sommersemester 2008
23. September 2008

Nachklausur zur Linearen Algebra II

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Studiengang: ______________________

Für die Klausur sind **keine** Hilfsmittel erlaubt. Die Lösungen zum Definitions- und Aufgabenteil sind lesbar (!) auf separaten Blättern zu erstellen. Es gibt insgesamt 36 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 18 Punkte erreicht wurden.

Einverständniserklärung: Hiermit willige ich ein, dass mein Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Vorlesungswebseite veröffentlicht wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	5	6	7	8	$\sum$
Punkte										

Definitionen

Geben Sie jeweils die vollständige Definition an. Dabei müssen alle Voraussetzungen formuliert werden; geben Sie z.B. zu jeder Variablen die Menge an, aus der sie stammt.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)
Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) Symmetrische Bilinearform.

b) "Geometrische" und "algebraische Vielfachheit" eines Eigenwerts.

Aufgabe 2 (1 Punkt)
Wie lautet die Ungleichung von Cauchy-Schwarz?

Aussagen

Für jedes richtige Kreuz erhalten Sie einen Pluspunkt, für jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Sind zwei Aussagen äquivalent und Sie kreuzen nur die eine der beiden Implikationen an, so erhalten Sie einen halben Punkt. Es können jedoch keine negativen Gesamtpunktzahlen pro Aufgabe entstehen! **Pro Zeile wird maximal ein Kreuz erwartet.**

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei K ein Körper und seien $A, B \in M_K(n, n)$. Seien M_A bzw. M_B die dazugehörigen Minimalpolynome und P_A bzw. P_B die dazugehörigen charakteristischen Polynome. Kreuzen Sie die richtigen Implikationen bzw. die richtigen Aussagen an.

	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftrightarrow$	
(a) λ ist Eigenwert von A	○	○	○	λ^2 ist Eigenwert von A^2.
(b) A ist diagonalisierbar	○	○	○	n ist gleich der Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.
(c) A und B sind ähnlich	○	○	○	$P_A = P_B$

	wahr	falsch
(d) Hat A nur Einträge aus $\mathbb{Z}$, so kann A keine Eigenwerte aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ haben.	○	○
(e) A und A^T haben dasselbe Minimalpolynom	○	○
(f) Hat $A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$ einen Eigenvektor zum Eigenwert $\sqrt{2}$, dann hat A unendlich viele Eigenvektoren zum Eigenwert $\sqrt{2}$.	○	○

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
(a) Ist $A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$, so ist durch $s(x, y) = x^T A y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt definiert.	○	○
(b) Ist $A \in M_{\mathbb{R}}(n, n)$, so ist durch $s(x, y) = x^T A y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ eine Bilinearform definiert.	○	○
(c) Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und gilt $s(b_i, b_j) > 0$ für alle Vektoren einer Basis von V, dann ist s positiv definit.	○	○
(d) Ist V ein euklidischer Vektorraum und gilt $\|x\| = 3$ und $\|y\| = 4$, so weiß man, dass $\langle x, y \rangle$ die Werte -12 oder 12, oder Werte zwischen -12 und 12 annehmen kann.	○	○

Aufgaben

Die Rechnungen und Beweise sind (wie üblich) auszuformulieren. Alles ist zu begründen und alle benutzten Symbole sind zu erklären.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)
Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und sei $\|v\| := \sqrt{\langle v,v \rangle}$ für alle $v \in V$.

a) Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ für alle $x, y \in V$.

b) Gibt es Normen, die die Parallelogrammgleichung nicht erfüllen? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel. Wenn nein, warum?

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)
Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Beweisen Sie:

a) Eigenwerte von selbstadjungierten Endomorphismen auf V sind immer reell.

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten selbstadjungierter Endomorphismen sind zueinander senkrecht.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Sei V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad≤ 2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) \ \mathrm{d}t.$$

Geben Sie eine Basis von $\{2t+1\}^\perp$ an.

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Welche Bedingungen müssen die Werte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit durch folgende Festlegung ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist? Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei

$$s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

Aufgabe 9 (5 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}^3$ und sei eine Basis von V gegeben durch $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Bekanntlich gibt es einen basisabhängigen Isomorphismus $\phi_\mathcal{B} : V \to V^\star$, der dadurch definiert ist, dass er jedem Basisvektor aus $\mathcal{B}$ seinen dualen Basisvektor zuordnet.

Sei $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\phi_\mathcal{B}(v)$.