Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

Sommersemester 2008
23. September 2008

Lösungsskizzen zur Nachklausur zur Linearen Algebra II

Definitionen

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)
Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) Symmetrische Bilinearform.

Sei V ein K-Vektorraum. $s : V \times V \to K$ heißt symmetrische Bilinearform, falls für alle $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt

- $s(\lambda v + \mu w, u) = \lambda s(v, u) + \mu s(w, u)$
- $s(u, \lambda v + \mu w) = \lambda s(u, v) + \mu s(u, w)$
- $s(v, w) = s(w, v)$

b) "Geometrische" und "algebraische Vielfachheit" eines Eigenwerts.

Sei V ein K-Vektorraum und $F \in \text{End}(V)$. Sei λ ein Eigenwert von F.

- Die geometrische Vielfachheit von λ ist die Dimension von $\text{Eig}(F, \lambda)$.
- Ist das charakteristische Polynom von F gerade $P_F = (t - \lambda)^k \cdot q$, wobei q den Faktor $(t - \lambda)$ nicht mehr enthält, so heißt k die algebraische Vielfachheit von λ.

Aufgabe 2 (1 Punkt)
Wie lautet die Ungleichung von Cauchy-Schwarz?

Ist V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum, so gilt $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle $x, y \in V$.

Aussagen

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei K ein Körper und seien $A, B \in M_K(n,n)$. Seien M_A bzw. M_B die dazugehörigen Minimalpolynome und P_A bzw. P_B die dazugehörigen charakteristischen Polynome. Kreuzen Sie die richtigen Implikationen bzw. die richtigen Aussagen an.

	$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftrightarrow$	
(a) λ ist Eigenwert von A	$\otimes$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	λ^2 ist Eigenwert von A^2.
(b) A ist diagonalisierbar	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\otimes$	n ist gleich der Summe der geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.
(c) A und B sind ähnlich	$\otimes$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$P_A = P_B$

	wahr	falsch
(d) Hat A nur Einträge aus $\mathbb{Z}$, so kann A keine Eigenwerte aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ haben.	$\bigcirc$	$\otimes$
(e) A und A^T haben dasselbe Minimalpolynom	$\otimes$	$\bigcirc$
(f) Hat $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ einen Eigenvektor zum Eigenwert $\sqrt{2}$, dann hat A unendlich viele Eigenvektoren zum Eigenwert $\sqrt{2}$.	$\otimes$	$\bigcirc$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

	wahr	falsch
(a) Ist $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$, so ist durch $s(x,y) = x^T A y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt definiert.	$\bigcirc$	$\otimes$
(b) Ist $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$, so ist durch $s(x,y) = x^T A y$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ eine Bilinearform definiert.	$\otimes$	$\bigcirc$
(c) Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und gilt $s(b_i, b_j) > 0$ für alle Vektoren einer Basis von V, dann ist s positiv definit.	$\bigcirc$	$\otimes$
(d) Ist V ein euklidischer Vektorraum und gilt $\|x\| = 3$ und $\|y\| = 4$, so weiß man, dass $\langle x, y \rangle$ die Werte -12 oder 12, oder Werte zwischen -12 und 12 annehmen kann.	$\otimes$	$\bigcirc$

Aufgaben

Aufgabe 5 (2+2 Punkte)
Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ und sei $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für alle $v \in V$.

a) Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ für alle $x, y \in V$.

   Es ist

   $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle = 2(\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

b) Gibt es Normen, die die Parallelogrammgleichung nicht erfüllen? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel. Wenn nein, warum?

   Ja, die z.B. die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$: $\|(x_1, x_2)\| := \max(|x_1|, |x_2|)$ für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

   Da ist z.B. $\|(1,0)+(1,1)\|^2 + \|(1,0)-(1,1)\|^2 = 5$, aber $2(\|(1,0)\|^2 + \|(1,1)\|^2) = 4$.

Aufgabe 6 (2+2 Punkte)
Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Beweisen Sie:

a) Eigenwerte von selbstadjungierten Endomorphismen auf V sind immer reell.

   Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ ein selbstadjungierter Endomorphismus auf einem unitären Vektorraum V und $F(v) = \lambda v$ für ein $v \neq 0$.

   Dann ist

   $\lambda\langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle F(v), v \rangle = \langle v, F(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda}\langle v, v \rangle$.

   Daraus folgt wegen $\langle v, v \rangle > 0$, dass $\lambda = \bar{\lambda}$ gelten muss, also ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten selbstadjungierter Endomorphismen sind zueinander senkrecht.

   Voraussetzungen wie in (a) und sei außerdem $F(v) = \lambda v$ und $F(w) = \mu w$ für $\lambda \neq \mu \in \mathbb{C}$ und $v, w \neq 0$.

   Dann ist

   $\lambda\langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle F(v), w \rangle = \langle v, F(w) \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \bar{\mu}\langle v, w \rangle = \mu\langle v, w \rangle$, da wegen (a) die Eigenwerte alle reell sind.

   Daraus folgt wegen $\lambda \neq \mu$, dass $\langle v, w \rangle = 0$ ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Sei V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad≤ 2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t.$$

Geben Sie eine Basis von $\{2t+1\}^{\perp}$ an.

Sei $p = a + bt + ct^2 \in V$ mit $0 = \langle p, 2t+1 \rangle = \int_0^1 (a + bt + ct^2)(2t+1)\ \mathrm{d}t$.

Rechnet man das aus, so erhält man die folgende Bedingung: $12a + 7b + 5c = 0$. Der Lösungsraum ist also 2-dimensional und zwei linear unabhängige Polynome, die diese Gleichung erfüllen sind z.B. $-5t + 7t^2$ und $5 - 12t^2$. Diese bilden demnach eine Basis von $\{2t+1\}^{\perp}$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)
Welche Bedingungen müssen die Werte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit durch folgende Festlegung ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist? Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sei

$$s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

Schreibt man das mit Hilfe einer Matrix, so lautet die Gleichung

$$s\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Ein Skalarprodukt ist eine positive definite symmetrische Bilinearform. Die Bilinearität ist immer erfüllt. Die Symmetrie liefert $b = c$. s ist positiv definit genau dann, wenn die Matrix positiv definit ist, und dass ist genau dann der Fall, wenn $a > 0$ und $ad - bc = ad - b^2 > 0$ sind.

Aufgabe 9 (5 Punkte)
Sei $V = \mathbb{R}^3$ und sei eine Basis von V gegeben durch $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Bekanntlich gibt es einen basisabhängigen Isomorphismus $\phi_{\mathcal{B}} : V \to V^\star$, der dadurch definiert ist, dass er jedem Basisvektor aus $\mathcal{B}$ seinen dualen Basisvektor zuordnet.

Sei $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\phi_{\mathcal{B}}(v)$.

Wir berechnen zunächst die zu $\mathcal{B}$ duale Basis. Dabei schreiben wir die Elemente aus $V^\star$ als Zeilen und meinen damit eigentlich die darstellenden Matrizen der Linearformen bzgl. der kanonischen Basen.

Sei $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Berechnung von $b_1^\star$: Es ist $b_1^\star \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (a\ b\ c)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ax + by + cz$.
Wir bestimmen die Matrixeinträge a, b, c:

Es ist nach Definition der dualen Basis

$$b_1^\star \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a + b = 1$$

$$b_1^\star \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a + c = 0$$

$$b_1^\star \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b + c = 0$$

Also $b_1^\star = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
Analog ergibt sich: $b_2^\star = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $b_3^\star = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Damit erhält man

$$\phi_{\mathcal{B}}(v) = \phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}) = \phi_{\mathcal{B}}(b_1 + b_2 + b_3) = \phi_{\mathcal{B}}(b_1) + \phi_{\mathcal{B}}(b_2) + \phi_{\mathcal{B}}(b_3) = (\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$