Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6-1
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/`

Sommersemester 2008
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

1. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, den 25. April 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Zeigen Sie: Ein nilpotenter Endomorphismus hat 0 als einzigen Eigenwert.

Aufgabe 2
Finden Sie (über $\mathbb{R}$) alle Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3
Sei $f \in \mathrm{End}(K^2)$ und sei $\{v_1, v_2\}$ ein Basis von K^2. Definiere f durch $f(v_1) = v_1 + v_2$ und $f(v_2) = v_1 - v_2$. Ist f diagonalisierbar für $K = \mathbb{R}$? $K = \mathbb{Q}$?

Aufgabe 4
Sei f ein Endomorphismus. Zeigen Sie: Hat $f^2 + f$ den Eigenwert -1, so hat f^3 den Eigenwert 1.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1
Beweisen Sie: Ist A eine symmetrische 2×2-Matrix über $\mathbb{R}$, so hat A reelle Eigenwerte.

Aufgabe 2
Sei $\dim_K V = n < \infty$ und $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass $f \circ g$ und $g \circ f$ dieselben Eigenwerte haben. (Tipp: Betrachten Sie, falls v Eigenvektor von $f \circ g$, den Vektor $g(v)$.)

Aufgabe 3
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$.
Zeigen Sie: Es ist $P_F(0) \neq 0$ genau dann, wenn F ein Isomorphismus ist.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
$V_1, \dots, V_m$ seien Untervektorräume von V. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig in der Form $v = v_1 + \ldots + v_m$ mit $v_i \in V_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ darstellen.

(ii) $V = V_1 + \ldots + V_m$ und für $1 \leq i \leq m$ ist $V_i \cap (V_1 + \ldots V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_m) = \{0\}$.

(Bemerkung: (i) und (ii) sind gleichbedeutend mit $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$.)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(i) über $\mathbb{R}$ und (ii) über $\mathbb{C}$.

b) Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit Basis $\{v_1, v_2\}$. Definiere $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ durch $f(v_1) = v_2$ und $f(v_2) = -2v_1 + 3v_2$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von f. Ist f diagonalisierbar?

c) Sei K ein Körper und $V = \{p \in K[x] \mid \deg p \leq n\}$. Sei $D \in \mathrm{End}_K(V)$ der Differenzialoperator, also $D(p) = p'$. Bestimmen Sie Eigenwerte, Eigenräume und das charakteristische Polynom von D.

Aufgabe 3 (2 Punkte)
Sei f ein Endomorphismus mit $f^3 = f$ und λ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie, dass λ nur die Werte $0, -1, 1$ annehmen kann.