Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6-1
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/

Sommersemester 2008
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

10. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, den 27. Juni 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ und $(v_1, \ldots, v_r)$ eine orthonormale Familie von Vektoren in V. Beweisen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

a) $(v_1, \ldots, v_r)$ ist eine Basis von V.

b) Ist $v \in V$, so folgt aus $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$, dass $v = 0$ ist.

c) Ist $v \in V$, so gilt $v = \sum\limits_{i=1}^{r} \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$.

Aufgabe 2
Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit kanonischem Skalarprodukt und U der Unterraum von V, der von den Vektoren $(1, 0, 0)$ und $(1, 1, 0)$ aufgespannt wird.

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $(1, 1, 1)$ auf U.

Aufgabe 3
Gegeben sei auf $V = \operatorname{span}(1, x, x^2, x^3) \subset \mathbb{R}[x]$ das Skalarprodukt

$$s(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\mathrm{d}t.$$

a) Bestimmen Sie die Matrix von s bzgl. der Basis $(1, x, x^2, x^3)$.

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

Aufgabe 4
Sei

$$l_2 := \left\{ (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

der Vektorraum der quadratsummierbaren Folgen (auch *Hilbertscher Folgenraum*) mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot y_i$$

für alle $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x, y \in l_2$.

Schreibe $e^{(j)} := (\delta_{ij})_{i\in\mathbb{N}}$ für $j \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie:

a) $S := \left\{ e^{(j)} \mid j \in \mathbb{N} \right\}$ ist ein Orthonormalsystem.

b) S ist keine Orthonormalbasis.

c) S lässt sich auch nicht zu einer Orthonormalbasis ergänzen.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Orthonormalisieren Sie in $\mathbb{C}^3$ mit dem Standardskalarprodukt die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, W ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $F : W \to V$ eine injektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass durch $\langle w, w' \rangle_F := \langle F(w), F(w') \rangle$ ein Skalarprodukt auf W erklärt ist.

   Was geht schief, wenn F nicht injektiv ist?

b) Zeigen Sie: Zu jeder Basis $\mathcal{B}$ eines endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraums V gibt es ein Skalarprodukt $\langle .,. \rangle_{\mathcal{B}}$, so dass $\mathcal{B}$ Orthonormalbasis bzgl. dieses Skalarprodukts ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Sei $V = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[-1,1]$ und sei U der Unterraum aller Polynomabbildungen vom Grad ≤ 3 eingeschränkt auf $[-1,1]$. Weiterhin sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|$.

Bestimmen Sie ein Element aus U, das zu f den kleinsten Abstand hat und zwar bzgl. der Metrik, die durch das folgende Skalarprodukt induziert wird:

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(t)h(t)\mathrm{d}t$$