Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6-1
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/

Sommersemester 2008
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

11. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, den 4. Juli 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Sei V euklidischer bzw. unitärer Vektorraum und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V.

Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $F \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann orthogonal bzw. unitär, wenn $(F(v_1), \dots, F(v_n))$ eine Orthonormalbasis von V ist.

Aufgabe 2
Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, wobei $x, y \in R^n$.

Zeigen Sie: x und y sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$ genau dann, wenn z und $\bar{z}$ sind linear unabhängig über $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass $SO(n) := \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = E_n, \det A = 1\}$ eine Untergruppe von $GL(n)$ ist.

Aufgabe 4
Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und die lineare Abbildung $f_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $f_\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von f_π.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beschreiben Sie, wie man mit Hilfe der Gramschen Determinante das Volumen eines Tetraeders berechnen kann. Überlegen Sie dazu (ohne Beweis!), wie man aus volumengleichen Tetraedern ein 3-dimensionales Parallelepiped bauen kann bzw. wie man ein Parallelepiped in volumensgleiche Tetraeder zerlegen kann.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

a) Für welche Werte von α ist $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(2)$?

b) Für welche Werte von α ist $\begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(2)$?

c) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathcal{U}(3)$ an, deren erste Zeile ein Vielfaches von $(1, 1, 1)$ ist?

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Sei V ein Euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle , \rangle$. Bezeichne $\mathcal{O}(V)$ die Gruppe der orthogonalen Abbildungen auf V bezüglich $\langle , \rangle$. Sei $a \in V \setminus \{0\}$. Definiere die *Spiegelung* S_a an der Hyperebene $\{a\}^\perp$ durch

$$S_a(x) := x - 2\frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a \qquad \text{für alle } x \in V.$$

Zeigen Sie:

a) S_a ist linear.

b) S_a ist orthogonal.

c) $S_a^2 = \mathrm{id}_V$.

d) $\langle S_a(x), y\rangle = \langle x, S_a(y)\rangle$ für alle $x, y \in V$.

Sei $F \in \mathcal{O}(V) \setminus \{\mathrm{id}_V\}$ und $u \in V$ mit $F(u) \neq u$. Setze $U := \{u\}^\perp$. Dann gilt

e) $S_{F(u)-u}(F(u)) = u$ und

f) $S_{F(u)-u} \circ F|_U$ ist ein orthogonaler Endomorphismus bzgl. $\langle , \rangle|_U$.

g) Bauen Sie die Ergebnisse der vorangehenden Teilaufgaben zu einem Induktionsbeweis des folgenden Satzes aus:

   Jedes $F \in \mathcal{O}(V) \setminus \{\mathrm{id}_V\}$ ist Hintereinanderausführung von höchstens $\dim V$ Spiegelungen.