Technische Universität Berlin **Sommersemester 2008**
Fakultät II, Institut für Mathematik Prof. Dr. Stefan Felsner
Sekretariat MA 6-1 Andrea Hoffkamp
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/`

2. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, den 2. Mai 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Sei $t \in \mathbb{R}$ und die reelle 3×3-Matrix A gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ t & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Existiert für $t \geq -1$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren?

Aufgabe 2
Geben Sie die Menge aller 3×3-Matrizen über $\mathbb{R}$ an, die die Eigenwerte $1, 2$ und 3 haben.

Aufgabe 3
Beweisen Sie, dass jede symmetrische reelle 2×2-Matrix diagonalisierbar ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1
Untersuchen Sie, für welche Endomorphismen eines beliebigen K-Vektorraums V alle Vektoren $v \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektoren sind.

Aufgabe 2
Seien $A, B \in M_K(n, n)$ mit $AB = BA$ und alle Eigenwerte von A und B seien einfach. Dann gilt: A und B haben die gleichen Eigenvektoren.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f^2 = id$.

a) Bestimmen Sie $|\det f|$ und $\det(f - id) \cdot \det(f + id)$.

b) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von f, so gilt $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

c) Geben Sie zu jedem möglichen f eine Matrix bezüglich einer Eigenbasis an. Welche drei Typen von Abbildungen kommen für f in Frage? Interpretieren Sie diese Abbildungen geometrisch.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Wir betrachten die Menge $X := \{A \in M_K(n,n) \mid A \text{ ist diagonalisierbar über } K\}$.
Zeigen Sie: $A, B \in X$ sind ähnlich genau dann, wenn $P_A = P_B$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien V_1, V_2, W_1, W_2 Unterräume des K-Vektorraumes V, mit $V_1 \oplus V_2 = W_1 \oplus W_2$.

a) Zeigen Sie: Ist $\dim_K V < \infty$, so folgt aus $V_1 \cong W_1$ auch $V_2 \cong W_2$.

b) Widerlegen Sie an einem Beispiel die Aussage: $V_1 = W_1 \Longrightarrow V_2 = W_2$.

c) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Aussage $V_1 \cong W_1 \Longrightarrow V_2 \cong W_2$ für $\dim_K V = \infty$ falsch ist.

d) Ist $f_1 \in \mathrm{End}(V_1)$ und $f_2 \in \mathrm{End}(V_2)$, so gibt es genau ein $f \in \mathrm{End}(V_1 \oplus V_2)$ mit $f|_{V_i} = f_i$ $(i = 1, 2)$.