Technische Universität Berlin **Sommersemester 2008**
Fakultät II, Institut für Mathematik Prof. Dr. Stefan Felsner
Sekretariat MA 6-1 Andrea Hoffkamp
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/`

3. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, den 9. Mai 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Seien $A, B \in M_{\mathbb{R}}(3,3)$ zwei Matrizen mit den charakteristischen Polynomen $P_A(t) = -t^3 + 2t^2 - t$ und $P_B(t) = -t^3 + 7t^2 - 9t + 3$. Zeigen Sie, dass der Kern von AB die Dimension 1 hat.

Aufgabe 2
Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{R}$). Geben Sie alle Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenvektoren an. Geben Sie eine invertierbare Matrix S an, so dass SAS^{-1} Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 3
Sind die folgenden Matrizen aus $M_{\mathbb{R}}(3,3)$ zu einer Diagonalmatrix ähnlich?

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Wenn ja, zu welcher? Bestimmen Sie gegebenenfalls auch eine dazugehörige Eigenbasis.

Übungsaufgaben

In der großen Übung werden Christian Stange und Ilker Özdemir eine MAPLE Vorführung zur Diagonalisierbarkeit machen.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei $A \in \mathrm{M}_K(n,n)$ diagonalisierbar und sei $S \in \mathrm{GL}(n,K)$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie, dass die Spalten von S^{-1} eine Basis aus Eigenvektoren von A sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Stellen Sie fest, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind, und finden Sie gegebenenfalls ein invertierbares S, so dass SAS^{-1} Diagonalmatrix ist.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
(Euklidischer Algorithmus für Polynome)

Sei K ein Körper und $P, Q \in K[x]$. $D \in K[x]$ heißt größter gemeinsamer Teiler von P und Q ($D = \mathrm{ggT}(P, Q)$), falls gilt

(i) D teilt P und D teilt Q (In Zeichen: $D|P$ und $D|Q$).

(ii) Für alle $D' \in K[x]$ mit $D'|P$ und $D'|Q$ gilt $D'|D$.

In Lineare Algebra I haben wir gesehen, dass zu $P, Q \in K[x]$ Polynome $S_1, R_1 \in K[x]$ existieren mit $P = S_1 \cdot Q + R_1$ und grad $R_1 <$ grad Q. Ist nun $R_1 \neq 0$, so existieren $S_2, R_2 \in K[x]$ mit $Q = S_2 \cdot R_1 + R_2$ und grad $R_2 <$ grad R_1. Dies wiederhole man so lange $R_i \neq 0$ ist, d.h. $R_{i-1} = S_{i+1} \cdot R_i + R_{i+1}$.

a) Zeigen Sie: Ist $R_i = 0$ für ein i, so ist R_{i-1} ein größter gemeinsamer Teiler von P und Q.

b) Berechnen Sie ggT(P,Q) für $P = x^9 + x^3$ und $Q = x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$ aus $\mathbb{R}[x]$.