Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6-1
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/

Sommersemester 2008
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

4. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, den 16.Mai 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und W ein T-invarianter Unterraum von V. Zeigen Sie, dass T eine "Blockmatrizendarstellung" $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ besitzt.

Aufgabe 2
Es sei $T \in \mathrm{End}_K(V)$ und $f \in K[x]$ irgendein Polynom. Zeigen Sie: Der Kern von $f(T)$ ist T-invariant.

Aufgabe 3
Sei A eine quadratische Matrix über $\mathbb{C}$ und sei λ ein Eigenwert von A^2. Zeigen Sie, dass A einen Eigenwert μ mit $\mu^2 = \lambda$ besitzt.

Aufgabe 4
Es sei $T : V \to V$ lineare Abbildung. Es gelte $T^k(v) = 0$, aber $T^{k-1}(v) \neq 0$ für ein $v \in V$. Zeigen Sie:

a) Die Menge $S = \{v, T(v), \ldots, T^{k-1}(v)\}$ ist linear unabhängig..

b) Der Unterraum W, der durch S erzeugt wird, ist T-invariant.

c) Die Einschränkung $T' := T_{|W}$ ist nilpotent vom Index k.

d) Bestimme die darstellende Matrix von T' bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (T^{k-1}(v), \ldots, T(v), v)$ von W.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei V ein K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ mit Eigenwert λ und p ein Polynom über K.

a) Zeigen Sie: Ist v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, so ist v auch Eigenvektor von $p(f)$. Was ist dann der zugehörige Eigenwert?

b) I. a. gilt nicht: Ist v Eigenvektor von $p(f)$, so auch von f.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Seien weiter $F \in \mathrm{End}(V)$ und $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $F^m = 0$. F heißt in diesem Fall *nilpotent*. Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Basis $\mathcal{B}$ von V zu konstruieren, so dass $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(F)$ eine *echte obere Dreiecksmatrix* ist, d.h. eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen.

a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathrm{Ker}(F^k) \subseteq \mathrm{Ker}(F^{k+1}).$$

Nun definieren wir rekursiv für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Basis $\mathcal{B}_k$ von $\mathrm{Ker}(F^k)$: Setze $\mathcal{B}_0 := \emptyset$ und ergänze $\mathcal{B}_k$ zu einer Basis $\mathcal{B}_{k+1}$ von $\mathrm{Ker}(F^{k+1})$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_m$ eine Basis von V ist.

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_m}(F)$ eine echte obere Dreiecksmatrix ist.

d) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von F.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Folgende Aufgabe soll mit MAPLE gelöst werden. Die MAPLE-Session aus der Großübung finden Sie auf der Vorlesungwebseite.

Gegeben ist folgende 8×8-Matrix über $\mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob A diagonalisierbar ist. Falls dies der Fall ist, soll A bezüglich einer Basis aus Eigenvektoren dargestellt werden.

Hierbei soll vorgegangen werden, wie bei einer "handschriftlichen Lösung": Also sind Befehle wie "CharacteristicPolynomial", "Eigenvalues" oder "Eigenvectors" verboten. Erlaubt ist so etwas wie "Determinant" oder "NullSpace".

Abgegeben werden soll ein kommentierter Ausdruck Ihrer Umformungsschritte mit Teilergebnissen.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -20 & -2 & \frac{4}{3} & 14 & -\frac{1}{3} & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & \frac{7}{2} & \frac{29}{12} & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & -9 & 0 & \frac{19}{3} & 6 & -\frac{4}{3} & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & 5 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & 0 & \frac{16}{3} & 6 & -\frac{1}{3} & 0 & 3 \\ 0 & -13 & -3 & \frac{5}{6} & 8 & \frac{2}{3} & \frac{7}{2} & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrix finden Sie schon im Maple-Format vorbereitet auf der Vorlesungsseite!