Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6-1
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/

Sommersemester 2008
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

5. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, den 23. Mai 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Geben Sie das Minimalpolynom M_A der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ an.

Aufgabe 2
Sei $T \in \mathrm{End}(V)$ und $\dim V < \infty$. Zeige: T ist invertierbar genau dann, wenn der konstante Ausdruck des Minimalpolynoms von 0 verschieden ist.

Aufgabe 3
Berechnen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

(Erinnerung: Das haben wir in der Vorlesung im Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton benutzt.)

Aufgabe 4
Geben Sie zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (über $\mathbb{R}$) ein Polynom an, welches A annulliert.

Aufgabe 5
Seien A_1 und A_2 quadratische Matrizen und $M = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.
Zeigen Sie: $P_M = P_{A_1} \cdot P_{A_2}$.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Es seien $S, T \in \mathrm{End}(V)$ mit $ST = TS$. Es sei λ ein Eigenwert von T und $W = \mathrm{Eig}(T, \lambda)$.
Zeigen Sie: W ist S-invariant.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei A eine 3×3-Matrix über $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass A keine Nullstelle des Polynoms $p(t) = t^2 + 1$ sein kann.

b) Verifizieren Sie, dass $p(t)$ die komplexe Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ annulliert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Es seien A und B quadratische Matrizen und $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom M_C von C das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome M_A und M_B von A bzw. B ist.

b) Benutzen Sie (a), um das Minimalpolynom folgender Matrix über $\mathbb{R}$ zu berechnen:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe: 2 Zusatzpunkte)

Beweisen Sie per Induktion den zweiten Teil des Satzes zur "Fast-Trigonalisierung" von Endomorphismen auf reellen Vektorräumen aus der Vorlesung. Zeigen Sie also: Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum endlicher Dimension und $F \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt, dass F bzgl. einer geeigneten Basis von V die folgende Gestalt hat

$$M(F) = \begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & * \\ & 0 & \ddots & \\ & & & A_{kk} \end{pmatrix},$$

wobei A_{ii} vom Typ $(1,1)$ oder $(2,2)$ ist.