Technische Universität Berlin **Sommersemester 2008**
Fakultät II, Institut für Mathematik Prof. Dr. Stefan Felsner
Sekretariat MA 6-1 Andrea Hoffkamp
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/`

6. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, den 30. Mai 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Sei $F \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie: P_F und M_F besitzen dieselben irreduziblen Faktoren.

Aufgabe 2
Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ mit $F^3 = F$. Zeigen Sie, dass F diagonalisierbar ist.

Aufgabe 3

a) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $F(x, y) = (x + y, 2x)$. Sei $f(t) = t^2 - 2t + 3 \in \mathbb{R}[x]$. Geben Sie $f(F)(x, y)$ an.

b) Sei V der Vektorraum der Polynome $ax^2 + bx + c$ vom Grad ≤ 2 über $\mathbb{R}$. Sei $D : V \to V$ der Differentialoperator. Es sei $f(t) = t^2 + 2t - 5$. Geben Sie $f(D)(ax^2 + bx + c)$ an.

Aufgabe 4
Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$, $a_i \in \mathbb{Z}$ und $a_n \neq 0$. Zeigen Sie: Ist $b = \frac{p}{q}$ (mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, d.h. der Bruch sei vollständig gekürzt) eine Nullstelle von f, so folgt $q|a_n$ und $p|a_0$. Ist f insbesondere normiert, so ist $b \in \mathbb{Z}$ und $b|a_0$.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei K ein Unterkörper von K'. Zeigen Sie: Sind $f, g \in K[x]$ und $q \in K'[x]$ mit $f = qg$, so folgt bereits $q \in K[x]$.

(Bemerkung: Das haben wir in der großen Übung verwendet, als wir bewiesen haben, dass für $F \in \mathrm{End}(V)$ mit $\dim V = n$ gilt: P_F teilt M_F^n.)

b) Seien $f = (x - 2)^2(x + 3)$ und $g = (x - 1)(x + 1)x^2 \in \mathbb{R}[x]$. Finden Sie Polynome $q, q' \in K[x]$ mit $1 = qf + q'g$. (Hinweis: Benutzen Sie den Euklidischen Algorithmus.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $V = \mathbb{R}^4$ und $F \in \operatorname{End}(V)$. Bezüglich einer Basis habe F die folgende Darstellung

$$M(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie M_F. Ist F diagonalisierbar?

b) Sei $A \in M_K(n,n)$ mit $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$. Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{R}$? über $\mathbb{Z}_2$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{GL}(K,3)$. Zeigen Sie, dass $a, b, c \in K$ existieren mit $A^{-1} = aE + bA + cA^2$.