Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6-1
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/

Sommersemester 2008
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

7. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, 6. Juni 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Abbildung (über $\mathbb{C}$), die durch folgende Matrix gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2
Sei $V = \mathbb{R}^3$, $F \in \mathrm{End}(V)$ und $M_F = x^2 + 4x + 4$ das Minimalpolynom von F.

a) Geben Sie das charakteristische Polynom P_F von F an.

b) Bestimmen Sie die Jordan Normalform von F.

Aufgabe 3
Sei V ein Euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in V$ gilt:

a) $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$

b) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cos\theta$ (verallgemeinerter Satz von Pythagoras bzw. Cosinussatz)

c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, wenn die Vektoren linear abhängig sind.

Aufgabe 5
Sei $V = \mathbb{R}^n$ mit kanonischem Skalarprodukt.

Ist $L = v + \mathbb{R}w \subset \mathbb{R}^n$ eine Gerade, so heißt $s \in \mathbb{R}^n$ orthogonal zu L, wenn $\langle s, x - y\rangle = 0$ für alle $x, y \in L$. Zeigen Sie:

a) Ist $L = v + \mathbb{R}w \subset \mathbb{R}^n$ eine Gerade und $s \in \mathbb{R}^n$, so gilt:

$$s \text{ ist orthogonal zu } L \Leftrightarrow s \perp w.$$

b) Ist $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$ eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, so ist (a_1, a_2) orthogonal zu L.

c) Zu einer Geraden orthogonale Vektoren kann man benutzen , um den kürzesten Abstand zwischen einem Punkt und einer Geraden zu bestimmen. Ist $L = v + \mathbb{R}w \subset \mathbb{R}^n$ eine Gerade und $u \in \mathbb{R}^n$, so ist der Abstand zwischen u und L definiert als

$$d(u, L) := \min\{\|x - u\| : x \in L\}.$$

Zeigen Sie, dass für den Abstand zwischen u und L gilt: Es gibt ein eindeutig bestimmtes $x \in L$, so dass $(x - u)$ orthogonal zu L ist. Für x gilt $d(u, L) = \|x - u\|$ (d.h. der senkrechte Abstand ist der kürzeste).

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Sei $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \operatorname{grad} p \leq 5\}$ und $F \in \operatorname{End}(V)$ mit $F(p) = p''$. Berechnen Sie das Minimalpolynom von F und die Jordan Normalform von F.

b) Sei B eine $n \times n$-Matrix und A die $2n \times 2n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} aE_n & 0 \\ B & aE_n \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass in der Jordan Normalform von A genau $\operatorname{rg}(B)$ Kästchen $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ und $2n - 2\operatorname{rg}(B)$ Kästchen (a) vorkommen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2) \in R^2$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle x, y \rangle := 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist. Bestimmen Sie bezüglich dieses Skalarprodukts die Länge des Vektors $(\frac{1}{2}, 0)$ und einen Vektor x' mit $x' \perp (\frac{1}{2}, 0)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum W mit $\dim W \geq 2$ sei ein Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ erklärt, und für zwei Vektoren $u, v \in W$ sei die (sogenannte *Gram'sche Matrix*) G so definiert:

$$G = \begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Es ist $\det G \neq 0$ genau dann, wenn die zwei Vektoren u und v linear unabhängig sind.

b) In einem $\mathbb{R}$-Vektorraum W mit $\dim W \geq 3$ sei ein Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ erklärt, und in W seien zwei nichtparallele Geraden

$$g = \{a + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad h = \{b + \mu v \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

mit $g \cap h = \emptyset$ gegeben (man sagt auch: g und h sind windschief). Hierbei sind $a, b, u, v \in W,\ u \neq 0, v \neq 0$ und u, v linear unabhängig ("g und h nicht parallel").

Zeigen Sie: Es gibt eine Gerade in W, die beide Geraden g und h schneidet und zu beiden orthogonal verläuft. (Nutzen Sie Teil (a)!)