Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6-1
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/

Sommersemester 2008
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

8. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, den 13.06.2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

$$x, y, z \text{ linear unabhängig } \iff x \times y, y \times z, x \times z \text{ linear unabhängig.}$$

Aufgabe 2
Sei $\mathcal{B} = ((2, i, 0), (3i, 0, 5), (0, 7, 2i))$ eine Basis des $\mathbb{C}^3$ und s eine komplexe Sesquilinearform mit der darstellenden Matrix

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 5 & -6i & 7i \\ 6i & 34 & -10i \\ -7i & 10i & 53 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass s das kanonische Skalarprodukt ist.

Aufgabe 3
Gibt es ein Skalarprodukt g auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ derart, dass gilt:

$$(1, 0) \perp (0, 1) \text{ und } (2, -3) \perp (-1, 1)?$$

Aufgabe 4
Gegeben seien $F, G \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit

$$F(x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \text{ und } G(x_1, x_2, x_3) = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3.$$

Zeigen Sie, dass $s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $s(x, y) = F(x) \cdot G(y)$ eine Bilinearform ist. Bestimmen Sie die darstellende Matrix von s bzgl. der kanonischen Basis.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie: Zwei Geraden

$$g_1 : x = a + \lambda v, \quad g_2 : y = b + \mu w \text{ mit } a, b, v, w \in \mathbb{R}^3, v, w \neq 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

sind genau dann windschief, wenn $\langle a - b, v \times w \rangle \neq 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle .,. \rangle : M_{\mathbb{C}}(n,n) \times M_{\mathbb{C}}(n,n) \to \mathbb{C} \text{ mit } \langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^T \bar{B})$$

ein komplexes Skalarprodukt auf der Menge der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1\\-1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basen von $\mathbb{R}^n$ und

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

die Matrixdarstellung der Bilinearform $\alpha : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$.

a) Bestimme die Matrixdarstellung von α bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$.

b) Gibt es eine Basis, in der die Matrixdarstellung von α eine Diagonalmatrix ist? Geben Sie eine solche Basis an oder begründen Sie, dass sie nicht existiert!