**Technische Universität Berlin**
**Fakultät II, Institut für Mathematik**
Sekretariat MA 6-1
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS08/LinAlg2/

**Sommersemester 2008**
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

# 9. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra II

Abgabetermin: Am Fr, 20. Juni 2008 **vor Beginn** der Vorlesung.

---

## Tutoriumsvorschläge

**Aufgabe 1**

a) Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum, $\langle .,. \rangle$ bezeichne sein Skalarprodukt und seien $x, y \in V$. Berechnen Sie:

- $\langle x+y, x+y \rangle$,
- $\langle x-y, x-y \rangle$ und
- $\langle x+y, x-y \rangle$.

b) Sei $V$ ein unitärer Vektorraum, $\langle .,. \rangle$ bezeichne sein Skalarprodukt und seien $x, y \in V$. Dann gelten die Ergebnisse, die in a) gefunden wurden nicht mehr. Geben Sie an, an welchen Stellen Ihre Rechnungen nicht mehr stimmen. Leiten Sie gültige Formeln her und finden Sie Gegenbeispiele für die falschen Formeln.

**Aufgabe 2**

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und sei $d : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ definiert durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \qquad (\textit{Diskrete Metrik})$$

a) Zeigen Sie, dass $d$ eine Metrik auf $V$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $d$ nicht von einer Norm induziert wird.

**Aufgabe 3**

Auf einem ($\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-) Vektorraum seien zwei Skalarprodukte $\langle .,. \rangle_1$ und $\langle .,. \rangle_2$ gegeben, und es sei $\langle v, v \rangle_1 = \langle v, v \rangle_2$ für alle $v \in V$.

Zeigen Sie: $\langle v, w \rangle_1 = \langle v, w \rangle_2$ für alle $v, w \in V$.

**Aufgabe 4**
Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und sei $X$ eine Teilmenge von $V$. Zeigen Sie:

a) $X^\perp := \{w \in V \mid \langle w, x \rangle = 0 \text{ für alle } x \in X\}$ ist ein Unterraum von V.

b) Sei $X = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Geben Sie eine Basis von $X^\perp$ an.

c) Sei $U$ ein Unterraum von $V$. Dann ist: $V = U \oplus U^\perp$.

## Hausaufgaben

**Aufgabe 1 (4 Punkte)**

a) Sei $V$ ein euklidischer Vektorraum. Seien $u, v \in V$ mit $\|u + v\| = \|u - v\|$.
Zeigen Sie: $\langle u, v \rangle = 0$ (d.h. $u \perp v$).

b) Gilt (a) auch, wenn $V$ ein unitärer Vektorraum ist?

**Aufgabe 2 (4 Punkte)**
Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $F \in \mathrm{End}(V)$ mit $\langle F(v), v \rangle = 0$ für alle $v \in V$.

a) Ist $V$ unitärer Vektorraum, so gilt $F = 0$.

b) Geben Sie ein Beispiel eines euklidischen Vektorraumes und eines $F \in \mathrm{End}(V)$ an, so dass $F \neq 0$, aber $\langle F(v), v \rangle = 0$ ist.

**Aufgabe 3 (4 Punkte)**
Sei $V$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und seien $U_1$ und $U_2$ Unterräume von $V$. Zeigen Sie:

a) $(U_1^\perp)^\perp = U_1$,

b) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ und

c) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.