Tagesablauf

- **9:00** Frühstück
- **9:30-13:00** Erste Sitzung (mit Pausen nach Bedarf)
- **13:00** Mittagessen
- **14:30-19:00** Zweite Sitzung (mit Pausen nach Bedarf)
- **19:00** Abendessen

Allgemeine Organisation

Am ersten Tag werden nach dem Mittagessen 5 Gruppen á 15-20 Leute gebildet. Diese Gruppen bleiben bis zum Ende bestehen. Die Betreuer der Gruppen werden täglich oder halbtäglich wechseln. Innerhalb der Gruppen werden die Themen in je 3 Kleingruppen bearbeitet. Die Kleingruppenzusammensetzung ist variabel. Die Kleingruppen bearbeiten verschiedene Themen und tragen nach der Bearbeitung der Themen ihr Thema innerhalb ihrer Großgruppe vor. Sowohl bei der Erarbeitung der Themen als auch bei Fragen des "guten Vortragstils" und Fragen der Formulierung hilft der Betreuer der jeweiligen Gruppe.

Programm des Kompaktseminars

Der Ablauf es Kompaktseminars gliedert sich wie folgt:

Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag
	Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Verfahren, Quotientenvektorräume, Lineare Abbildungen und Matrizen	Cayley-Hamilton, Jordansche Normalform, Euklidische und unitäre Vektorräume	Dualität und Skalarprodukte, Bilinearformen und Hauptachsentransformation
Gruppen, Vektorräume, Äquivalenzrelationen, Polynome, lineare Abbildungen, Basen, Dimension, Dimensionssätze	Determinanten, Eigenwerte, Diagonalisierung, Trigonalisierung, Invarianz, Fast-Trigonalisierbarkeit	Orthogonalität, orthogonale, unitäre, selbstadjungierte Endomorphismen, Dualräume	

Mittwoch Nachmittag

1. Gruppe – (Lineare) Abbildungen, Äquivalenzrelationen

- Definiert den Begriff Abbildung. Wann ist eine Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv?
- Wie ist der Begriff Äquivalenzrelation definiert? (Definiert auch damit zusammenhängende Begriffe.) Gebt Beispiele an. Welcher Zusammenhang besteht zwischen einer disjunkten Zerlegung einer Menge und einer Äquivalenzrelation?
- Wann ist eine Abbildung linear? Definiert: Kern, Bild, Urbild.
- Was gilt für Urbilder (unter einer linearen Abbildung) linear unabhängiger Vektoren? Beweis?
- Betrachtet als Beispiele für lineare Abbildungen „$\frac{d}{dx}$“, „$\int$“ in C^∞ bzw. $\mathbb{R}[x]_{\deg \leq d}$ (Polynome vom Grad höchstens d) und andere.
- Formuliert folgenden Satz und beweist ihn: $\dim KerF + \dim ImF = \dim V$ $(F \in \mathrm{Hom}(V, W))$ (Dimensionssatz für lineare Abbildungen)
- Gebt Kriterien für die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von linearen Abbildungen an (mit Hilfe des Dimensionssatzes im Endlichdimensionalen). Erläutert den Zusammenhang.

2. Gruppe – Gruppen, Ringe, Körper, Polynome, Vektorräume

- Definiert die Begriffe: Gruppe, Untergruppe, Ring, Körper. Charakterisiert die Unterschiede zwischen diesen Begriffen.
- Gebt jeweils Beispiele (verschiedene Typen von Matrizen, S_n, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, ...)
- Wie ist der Begriff Polynom definiert? Worin besteht der Unterschied zwischen Polynom und Polynomabbildung?
- Was gilt für die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms? (Beweisidee). Wo geht die Polynomdivision ein und was macht sie? Wie lautet der Fundamentalsatz der Algebra?
- Definiert: Vektorraum. Als Beispiele: K^n, $\mathbb{R}[t]_{\deg \leq d}$, Raum der endlichen Folgen (ℓ_e) und der stetigen Funktionen.
- Definiert: Unter(vektor)räume. Betrachtet: Schnitt, Vereinigung, (direkte) Summe von Unterräumen, Projektion (Direkte Summenzerlegung des VR in Bild und Kern). Gebt Beispiele an.

3. Gruppe – Basis, Basisergänzung

- Definiert: Erzeugendensystem, Span, Basis, Lineare Unabhängigkeit. Gebt Beispiele.
- Beweist: Jeder Vektor hat eine eindeutige Darstellung bezüglich einer Basis.
- Formuliert folgende Sätze und beweist sie: Basisaustausch, bzw. -ergänzungssatz.
- Definiert den Begriff Dimension und beweist seine Wohldefiniertheit.

- Beweist die Existenz einer Basis im endlicherzeugten Fall.
- Gebt ein Beispiel eines unendlich-dimensionalen Vektorraums.
- Formuliert folgenden Satz und beweist ihn: Dimensionssatz für Summen von Unterräumen und direkte Summen.

Donnerstag Vormittag

1. Gruppe – Quotientenvektorräume

- Definiert Quotientenvektorraum und diskutiert die wesentlichen Eigenschaften. Gebt Beispiele an. Wie bestimmt man die Dimension eines Quotientenvektorraums?
- Definiert den Begriff des affinen Unterraums und definiert die damit zusammenhängenden Begriffe (Dimension,...). Erklärt die Unterschiede zwischen affinen Unterräumen und Vektorräumen.
- Was besagt der Homomorphiesatz?

2. Gruppe – Lineare Gleichungssysteme und Gaußverfahren

- Beschreibt das Gaußsche Verfahren, geht dabei auf die Grundlagen der Matrizenrechnung, Zeilenumformungen und Elementarmatrizen ein.
- Erläutert die Begriffe: Zeilenstufenform, Zeilenrang, Spaltenrang, Rang und ihre Zusammenhänge und sowie das Rangkriterium zur Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen.
- Welche Aussage kann man allgemein über $\text{Lös}(A, b)$ für ein lineares Gleichungssystem machen (in Bezug auf spezielle und homogene Lösungen)? Diskutiert die Parametrisierung von $\text{Lös}(A, b)$.
- Wie invertiert man Matrizen? Charakterisiert kurz $\text{GL}(n, K)$.

3. Gruppe – Lineare Abbildungen und Matrizen

- Wiederholt die Begriffe: Koordinatenfunktionen, Isomorphismus zu K^n (von endlichdimensionalen Vektorräumen).
- Was ist eine darstellende Matrix? Welche Zusammenhänge gibt es zwischen einem Homomorphismus und seiner darstellenden Matrix? Beweist die Isomorphie zwischen dem Vektorraum der (darstellenden) Matrizen und dem Vektorraum der linearen Abbildungen (im endlichdimensionalen). Nennt Beispiele, u.a. $\frac{d}{dx}$ in $\mathbb{R}[x]_{\deg \leq d}$.
- Stellt die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen und Matrixmultiplikationen dar.
- Erklärt Basistransformationen für darstellende Matrizen von linearen Abbildungen und Endomorphismen. Wie führt man sie durch? Gebt Beispiele.
- Definiert Äquivalenz und Ähnlichkeit von Matrizen. (Beispiele)
- Wie sieht die Normalform von Klassen äquivalenter Matrizen aus? Beweis?

Donnerstag Nachmittag

1. Gruppe – Determinanten

- Wie sind Determinanten definiert? Wie berechnet man sie?
- Welche Eigenschaften haben Determinanten? (Beweis des Determinantenmultiplikationssatzes und des Rangkriteriums)
- Beweist die Existenz (Leibniz) und Eindeutigkeit von Determinanten.
- Wie kann man Determinanten (über $\mathbb{R}$) geometrisch deuten?
- Definiert die komplementäre Matrix und gebt den Satz von Cramer zur Lösung eines Gleichungssystems an.

2. Gruppe – Eigenräume

- Wiederholt die Begriffe Eigenwert, -raum, -vektor und charakteristisches Polynom. Gebt Beispiele im $\mathbb{R}^2$ an.
- Beweist, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Welche Konsequenzen hat das? (direkte Summe der Eigenräume ...)
- Was ist die algebraische und geometrische Vielfachheit? Welcher Zusammenhang besteht?
- Beweist, dass ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben (im endlichdimensionalen). Gilt das auch umgekehrt?

3. Gruppe: Invarianz, Diagonalisierung/Trigonalisierung

- Definiert die Begriffe: Diagonalisierung, Fahne, F-invariant, Trigonalisierung.
- Welche Auswirkungen haben F-invariante Unterräume auf die Struktur einer darstellenden Matrix?
- Welche Kriterien gibt es für Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit? Gebt Beispiele und erläutert Berechnungsverfahren. Warum funktioniert Gauß nicht?
- Gebt Beispiele für diagonalisierbare, trigonalisierbare (und nicht diagonalisierbare) und nicht trigonalisierbare Endomorphismen, z.B. im $\mathbb{R}^2$.
- Diskutiert die „Fast“-Trigonalisierbarkeit für reelle Endomorphismen.

Freitag Vormittag

1. Gruppe: Cayley-Hamilton

- Diskutiert den Einsetz(ring)homomorphismus für einen Endomorphismus in Polynome. Zeigt, dass er weder injektiv noch surjektiv ist.
- Definiert den Begriff: Minimalpolynom und beweist dessen Existenz.

- Formuliert und beweist den Satz von Cayley-Hamilton. Wozu wird der Satz benötigt?

2. Gruppe – Jordan-Normalform

- Wie sieht eine Jordan-Normalform aus? Welche Begriffe benötigt man?
- Gebt Beispiele für verschiedene Jordan-Normalformen (z.B. Minimalpolynom = charakteristisches Polynom bzw. „$\neq$“, verschiedene Dimensionen der Haupträume bzw. Eigenräume (algebraische bzw. geometrische Vielfachheiten), usw.)

3. Gruppe – Euklidische und unitäre Vektorräume

- Was ist eine Bilinearform, quadratische Form, Sesquilinearform (Warum behandelt man $\mathbb{C}$ als Sonderfall?), Skalarprodukt? Was eine Norm? Wann ist eine Bilinearform nicht ausgeartet? Wie erkennt man das? Welche Zusammenhänge gelten zwischen Normen und Skalarprodukten? Gebt Beispiele an. (Raum der quadratsummierbaren Folgen (ℓ_2), stetige Funktionen).
- Was ist eine Metrik? Welcher Zusammenhang besteht zwischen Vektorräumen mit Skalarprodukt, normierten Räumen und metrischen Räumen?
- Was sind euklidische/unitäre Vektorräume?
- Formuliert den Satz von Cauchy-Schwarz und die Polarisierungsformeln.
- Gebt den Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ und den Winkeln zwischen zwei Vektoren an.

Freitag Nachmittag

1. Gruppe – Orthogonalität

- Definiert die Begriffe: orthogonal, orthogonales Komplement.
- Welche Aussagen gelten für das orthogonale Komplement?
- Was ist eine Orthogonalbasis bzw. Orthonormalbasis? Erläutere das Gram-Schmidt-Verfahren
- Was ist die "Gram'sche Determinante" und wozu haben wir sie benutzt?

2. Gruppe – selbstadjungierte, orthogonale und unitäre Endomorphismen

- Definiert die Begriffe: selbstadjungiert, orthogonal und unitär. Gebt äquivalente Kriterien an. Wie sehen die Transformationsformeln aus? Gebt eine tabellarische Übersicht an.
- Welche Eigenschaften haben selbstadjungierte, normale, orthogonale und unitäre Endomorphismen, z.B. bzgl. der Diagonalisierbarkeit. Beweist den entsprechenden Satz für selbstadjungierte Endomorphismen.

3. Gruppe – Dualräume

- Wie ist der Dualraum definiert?
- Welche Aussagen gelten für die Dimension des Dualraums? Was ist die duale Basis? Beweist die Isomorphie von V und V^* für $\dim V < \infty$. Gebt Beispiele an. Was ist der Annulator?
- Beweist die Bijektion zwischen V und V^{**} (für $\dim V < \infty$).
- Was ist die duale Abbildung zu einer linearen Abbildung? Was kann man über die darstellenden Matrizen der dualen Abbildung aussagen?

Samstag Vormittag

1. Gruppe – Bilinearformen und Hauptachsentransformation

- Welche Eigenschaften von Bilinearformen/Skalarprodukten können an den darstellenden Matrizen abgelesen werden?
- Welche Besonderheiten hat hier die Basistransformation? Stellt gegenüber, wie sich Basistransformationen auf darstellende Matrizen von Endomorphismen bzw. Bilinearformen auswirken. Geht dabei auch auf den Trägheitssatz von Sylvester ein.
- Formuliert den Satz über die Hauptachsentransformation.
- Betrachtet als Beispiel Quadriken im $\mathbb{R}^2$.

2. Gruppe – Dualität und Skalarprodukte

- Wie lautet die allgemeine Definition von Bilinearform? Was bedeutet "nicht ausgeartet"?
- Wie ist der kanonische Isomorphismus zwischen eine euklidischen Vektorraum und seinem Dualraum definiert. Warum ist das ein Isomorphismus?
- Wie ist die adjungierte Abbildung definiert? Beweist die Existenz und Eindeutigkeit. Stelle den Zusammenhang zur dualen Abbildung dar.