

## 13. Übung

### zur Maß- und Integrationstheorie

**Aufgabe 1** **(4 Punkte)**

Eine Funktion  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann von beschränkter Variation, wenn es eine nichtfallende Funktion  $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $x, y \in [a, b]$  mit  $x < y$  die Ungleichung

$$F(y) - F(x) \leq G(y) - G(x)$$

gilt.

**Aufgabe 2** **(4 Punkte)**

Sind  $F$  eine Lipschitz stetige und  $G$  eine absolutstetige Funktion, so ist  $F \circ G$  absolutstetig.

**Aufgabe 3 (&4)** **(8 Punkte)**

Es seien  $\mu$  und  $\nu$  zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Dann heißt

$$H(\nu|\mu) := \begin{cases} \int_{\Omega} \log \frac{d\nu}{d\mu} d\nu & : \text{ falls } \nu \ll \mu \\ \infty & : \text{ sonst;} \end{cases}$$

die *relative Entropie* von  $\nu$  bezüglich  $\mu$  (oder auch *Kullback-Leibler Abstand* von  $\nu$  und  $\mu$ ). Zeigen Sie:

- (a) Es gilt  $H(\nu|\mu) = \int_{\Omega} \frac{d\nu}{d\mu} \log \frac{d\nu}{d\mu} d\mu$ , falls  $\nu \ll \mu$ . Folgt in diesem Fall  $H(\nu|\mu) < \infty$ ?
- (b)  $H(\cdot|\mu)$  ist nichtnegativ auf der Menge  $\mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$  der Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  und  $\mu$  ist die einzige Nullstelle.
- (c) Für fixiertes  $\mu$  ist  $H(\cdot|\mu)$  konvex auf  $\mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$ ; das heißt, für  $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$  und alle  $\lambda \in (0, 1)$  gilt
$$H(\lambda\nu_1 + (1 - \lambda)\nu_2|\mu) \leq \lambda H(\nu_1|\mu) + (1 - \lambda)H(\nu_2|\mu).$$
- (d)  $\|\nu - \mu\|^2 \leq 2H(\nu|\mu)$ , wobei  $\|\cdot\|$  die Totalvariation bezeichnet; andererseits existiert kein  $C \in (0, \infty)$  mit  $H(\nu|\mu) \leq C\|\nu - \mu\|^2$  für alle  $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1(\Omega, \mathcal{F})$ .
- (e) Berechnen Sie  $H(\cdot|\mu)$  für  $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$  und  $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$ .

*Hinweis:* Jensen'sche Ungleichung; zu (d): Verwenden Sie Aufgabe 1 von Blatt 12 und die Ungleichung  $|x - 1| \leq \sqrt{\frac{1}{3}f(x)g(x)}$  für  $x \geq 0$ , mit  $f(x) = 4 + 2x$  und  $g(x) = x \log x - x + 1$ , sowie die Hölder'sche Ungleichung.

**Gesamtpunktzahl: 16 Punkte**