

## 9. Übung

### zur Maß- und Integrationstheorie

**Aufgabe 1** **(4 Punkte)**

Es sei  $p \geq 1$ . Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass aus der Konvergenz dem Maße nach im Allgemeinen nicht die Konvergenz in  $\mathcal{L}^p$  folgt.

**Aufgabe 2** **(4 Punkte)**

Es seien  $f, f_1, f_2 \dots$  und  $g, g_1, g_2 \dots$  messbare reelle Funktionen auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ , so dass  $f_n \rightarrow f$  dem Maße nach und  $g_n \rightarrow g$  dem Maße nach. Zeigen Sie:

- (a) Dann gilt auch  $f_n + g_n \rightarrow f + g$  dem Maße nach.
- (b) Ist  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so folgt  $\varphi \circ f_n \rightarrow \varphi \circ f$  dem Maße nach.

Hinweis zu (b): Behandeln Sie zuerst den Fall, dass  $\varphi$  kompakten Träger hat und somit gleichmäßig stetig ist.

**Aufgabe 3** **(4 Punkte)**

Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum und  $p, q \in (1, \infty)$  seien derart gewählt, dass  $1/p + 1/q = 1$  gilt.

- (a) Zeigen Sie: Für  $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$  und  $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$  folgt  $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .
- (b) Man sagt, dass eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  *schwach* gegen  $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  konvergiert, falls für alle  $g \in L^q(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n g d\mu = \int_{\Omega} f g d\mu$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Konvergenz von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f$  bezüglich  $\|\cdot\|_p$  die schwache Konvergenz von  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $f$  impliziert.

**Aufgabe 4** **(4 Punkte)**

Es sei  $\mu$  das Zählmaß auf  $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ . Zeigen Sie, dass eine Folge reellwertiger Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genau dann dem Maße nach gegen eine  $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathfrak{B})$ -messbare Funktion  $f$  konvergiert, falls  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

**Gesamtpunktzahl: 16 Punkte**