Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2010

Analysis III

10.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 30. 6. / 1. 7.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t > 0,$$

wobei D eine stetige Funktion ist, die nicht schneller als exponentiell wächst, d.h. es gibt Konstanten $M > 0, t_0 > 0$ und $a > 0$, so daß

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad \text{für } t > t_0.$$

Zeige, daß dann keine Lösung u dieser Differentialgleichung schneller als exponentiell wächst, es also Konstanten $K > 0$ und $b > 0$ gibt mit

$$|u(t)| \leq Ke^{bt}, \quad \text{für } t > t_0.$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

(i) Löse das Randwertproblem für die Differentialgleichung

$$-u''(x) + 2u'(x) + 8u(x) = 0, \quad x \in (0,1),$$

mit

(a) homogenen Dirichlet-Randbedingungen,

(b) $u(0) = 0,\ u(1) = 1$,

(ii) Unter welchen Bedingungen ist die Aufgabe

$$-u''(x) = 0, \quad x \in (a,b),$$

mit Robinschen Randbedingungen lösbar, d.h. Randbedingungen der Form

$$c_a u'(a) + u(a) = \alpha,\ c_b u'(b) + u(b) = \beta,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c_a, c_b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Aufgabe 3: **7 Punkte**

(i) Beweise die sogenannte LAGRANGE-Identität: Sei

$$(Lu)(x) := -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x), \quad x \in (a,b),$$

$p \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $p(x) > 0$ für $x \in (a,b)$, $q \in \mathcal{C}[a,b]$, der das STURM-LIOUVILLE-Problem beschreibende Differentialausdruck. Dann gilt für zwei Funktionen $u, v \in \mathcal{C}^2[a,b]$

$$uLv - vLu = (p(u'v - uv'))' \ .$$

Gilt außerdem $u(a) = u(b) = v(a) = v(b) = 0$, so folgt

$$(Lu, v)_2 = (u, Lv)_2 \, ,$$

wobei $(\cdot,\cdot)_2$ das übliche $L^2(a,b)$-Skalarprodukt bezeichne.

(ii) Wir betrachten das RWP

$$\begin{cases} -u'' - \lambda u = 0 & \text{auf } (0,1) \\ u(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Für welche λ besitzt das Problem nicht-triviale Lösungen? Ein solches λ wird *Eigenwert des RWP* genannt, eine zugehörige nicht-triviale Lösung nennt man *Eigenlösung*. Das obige RWP bezeichnet man auch als *Eigenwertproblem*.

Wir betrachten nun das Eigenwertproblem zum Sturm-Liouville-Problem

$$\begin{cases} -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) - \lambda u(x) = 0, & x \in (a,b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

mit $p \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $p(x) > 0$ auf $[a,b]$ und $q \in \mathcal{C}[a,b]$ reell.

(a) Zeige, daß hier alle Eigenwerte reell sind.

(b) Es gelte $q(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Zeige, daß nun alle Eigenwerte nichtnegativ sind.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Jeder der beiden Tanks K_1, K_2 enthalte 100 Liter Wasser, in dem 5kg bzw. 2kg Salz aufgelöst seien. Beginnend mit der Zeit $t_0 = 0$ soll in K_1 pro Minute 1 Liter einer Salzlösung der Konzentration $0,1$kg/Liter eingeleitet werden. Ferner sollen 2 Liter/Minute von K_1 nach K_2, 1 Liter/Minute von K_2 nach K_1 herübergeleitet werden und 1 Liter/Minute aus K_2 in einen Abfluß geleitet werden. Wie groß ist der Salzgehalt $m_i(t)$ in K_i zur Zeit $t > 0$? Zeige, daß die Salzkonzentration in K_i gegen die Konzentration der eingeleiteten Lösung strebt.