Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2010

Analysis III

2.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 5. / 6. Mai.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Ermittle, welche der folgenden Mengen Borel-meßbar sind und berechne gegebenenfalls deren (Lebesgue-Borelsches) Maß.

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, x \text{ und } y \text{ sind rational}\} \\ B &= \{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, x \text{ oder } y \text{ sind rational}\} \\ C &= \{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, x \text{ und } y \text{ sind irrational}\} \\ D &= \{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, x = y\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es sei $\Omega = (0,1)^2$. Für $A \subset \Omega$ definieren wir

$$\eta(A) := \inf \Big\{ \sum_{k=1}^{N} \mu_0(R_k) \,\Big|\, \exists N \in \mathbb{N}, R_1, \ldots, R_N \in \mathfrak{R} \text{ mit } A \subset \bigcup_{k=1}^{N} R_k \Big\},$$

wobei $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$ der Ring der elementargeometrischen Figuren und μ_0 der entsprechende natürliche Inhalt auf $\mathfrak{R}$ sei. Beweise mithilfe der Menge $\Omega \cap \mathbb{Q}^2$, daß η nicht (abzählbar) subadditiv ist, also η nicht mit dem äußeren Maß μ^* übereinstimmt.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)$ die σ-Algebra der Lebesgue-meßbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ und mit $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ die σ-Algebra der Borelschen Teilmengen des $\mathbb{R}^d$. In der Übung haben wir eine nicht Lebesgue-meßbare Teilmenge A von $\mathbb{R}$ konstruiert und somit gezeigt, daß $\mathfrak{A}(\mathbb{R}) \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist.

In dieser Aufgabe wollen wir nun eine Lebesgue-meßbare, aber nicht Borel-meßbare Teilmenge B des $\mathbb{R}^2$ konstruieren: $B \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^2)$ und $B \notin \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$.

(i) Wir schreiben $\mathbb{R}^2$ in der Form $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und entsprechend ein Element $z \in \mathbb{R}^2$ in der Form $z = (x,y)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Sei nun $M \subset \mathbb{R}$. Zeige, daß folgendes gilt:

$$M \times \{0\} = \{(m,0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, m \in M\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2) \quad \text{genau dann, wenn} \quad M \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

(ii) Zeige, daß $\mathbb{R} \times \{0\}$ eine Nullmenge bezüglich des Lebesgue-Maßes im $\mathbb{R}^2$ ist: $\mathbb{R} \times \{0\} \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^2)$ und $\mu(\mathbb{R} \times \{0\}) = 0$.

(iii) Konstruiere mit Hilfe der oben erwähnten nicht Lebesgue-meßbaren Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ und den Teilen (i) und (ii) eine Lebesgue-meßbare, aber nicht Borel-meßbare Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$.

Bemerkung: Es ist auch möglich Lebesgue-meßbare, aber nicht Borel-meßbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ zu konstruieren.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine Menge $N \subseteq \Omega$ heißt μ-Nullmenge, falls $N \in \mathfrak{A}$ und $\mu(N) = 0$ ist. Der Maßraum heißt vollständig, falls jede Teilmenge einer μ-Nullmenge wieder eine μ-Nullmenge ist, insbesondere also in $\mathfrak{A}$ enthalten ist.

(i) Beweise, daß jeder Maßraum vervollständigt werden kann. Hierzu sei

$$\overline{\mathfrak{A}} := \{A \cup N \mid A \in \mathfrak{A} \text{ und es gibt eine } \mu\text{-Nullmenge } M \text{ mit } N \subset M\}.$$

und $\overline{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ für $A \cup N \in \overline{\mathfrak{A}}$.
Zeige nun, daß $(\Omega, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mu})$ ein vollständiger Maßraum ist.
Zeige weiterhin, daß dies der kleinste vollständige Maßraum ist, der $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ umfaßt, das heißt, ist $(\Omega, \mathfrak{A}', \mu')$ ein weiterer vollständiger Maßraum mit $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ und $\mu'|_{\mathfrak{A}} = \mu$, so gilt $\overline{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}'$ und $\mu'|_{\overline{\mathfrak{A}}} = \overline{\mu}$.

(ii) Sei nun $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra der (Lebesgue-)meßbaren Mengen und λ das entsprechende d-dimensionale Lebesgue-Maß. Zeige, daß jede Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mu^*(A) = 0$ eine λ-Nullmenge ist. Hier ist μ^* das vom elementargeometrischen Inhalt erzeugte äußere Maß auf $\mathbb{R}^d$. Folgere, daß die Lebesgue-σ-Algebra[1] vollständig ist.

(iii) Zeige, daß jede Lebesgue-meßbare Menge dargestellt werden kann als Vereinigung einer Borel-meßbaren Menge und einer Lebesgue-Nullmenge. Ist $\mathfrak{B}$ die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$, mit dem Lebesgue-Borel-Maß λ, so zeige damit schließlich, daß $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{B}}$ und $\overline{\lambda} = \lambda$.

[1] Formal korrekt ist natürlich zu zeigen: $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{A}, \lambda)$ ist vollständig