Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2010

Analysis III

4.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 19. / 20. Mai

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Beweise die folgende Verallgemeinerung des Satzes über die monotone Konvergenz:
Ist (f_n) eine nichtfallende Folge meßbarer Funktionen und gilt $\int f_1^- d\mu < \infty$, so folgt

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es sei $\Omega = [0,1]$ und λ^1 das Lebesgue-Maß auf Ω. Wir setzen $f_n(x) := ne^{-nx}$ für $n \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$. Dann ist f_n eine Folge nichtnegativer meßbarer Funktionen auf Ω. Zeige, daß (f_n) λ^1-fast überall gegen eine Funktion f konvergiert, wobei

$$\int f d\lambda^1 \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda^1$$

gilt. Warum ist hier der Satz von der majorisierten Konvergenz nicht anwendbar?

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Für alle $a > 0$ sei $f|_{[0,a]}$ regelintegrierbar[1]. Zeige die folgenden Behauptungen.

(i) Wenn $f \in L^1(\lambda^1)$ ist, so ist f uneigentlich regelintegrierbar und es gilt

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x)dx = \int f d\lambda^1.$$

(ii) Sei $f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \chi_{[n,n+1)}$. Dann ist f uneigentlich regelintegrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar.

(iii) Ist aber f nichtnegativ und uneigentlich regelintegrierbar, so ist $f \in L^1(\mu)$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei $\delta_{\mathbb{N}}$ das Diracmaß zu den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, d.h. für jedes $A \subseteq \mathbb{R}$ ist $\delta_{\mathbb{N}}(A)$:=Anzahl der Elemente in $A \cap \mathbb{N}$. Sei weiterhin $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum der Folgen in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Vektorraum der Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\hat{} : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei gegeben durch $f \mapsto \hat{f} := (f(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

(i) Zeige, daß für $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Gleichheit $\hat{f} = \hat{g}$ genau dann gilt, wenn $f = g$ $\delta_{\mathbb{N}}$-fast überall gilt.

(ii) Zeige, daß $f \in L^1(\delta_{\mathbb{N}})$ genau dann gilt, wenn die Reihe $\sum \hat{f}$ absolut konvergiert und daß dann $\int f d\delta_{\mathbb{N}} = \sum \hat{f}$ gilt.

(iii) Folgere das Majorantenkriterium für Reihen aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

[1] Statt Regelintegrierbarkeit kann auch Riemann-Integrierbarkeit betrachtet werden.