Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2010

Analysis III

5.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 26. / 27. Mai

Aufgabe 1: **5 Punkte**

(a) Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq q < p$.

(i) Zeige, daß $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ gilt, falls das Maß μ endlich ist. Zeige weiterhin, daß in diesem Fall die Einbettung

$$i : (L^p(\mu), \|\cdot\|_p) \to (L^q(\mu), \|\cdot\|_q), \quad f \mapsto i(f) := f$$

von $L^p(\mu)$ nach $L^q(\mu)$ stetig ist.

(ii) Zeige, daß im allgemeinen weder $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$ noch $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ gilt.

(b) Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit dem Zählmaß μ. Zeige, daß für $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt: $L^p(\mu) \subset L^q(\mu)$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum.

(i) Sei $0 < p < 1$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $1/p + 1/q = 1$. Es seien weiterhin $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $g \neq 0$ f.ü.. Beweise die umgekehrte Hölder-Ungleichung:

$$\int |fg| d\mu \geq \Big(\int |f|^p d\mu \Big)^{1/p} \Big(\int |g|^q d\mu \Big)^{1/q}.$$

(ii) Es sei $1 \leq q \leq r \leq p$ und $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$. Zeige, daß dann $f \in L^r(\mu)$ folgt und die Interpolationsungleichung

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta}, \quad 1/r = (1-\theta)/p + \theta/q$$

gilt.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, $p > 1$ und $1/p + 1/q = 1$. Seien $f, f_n \in L^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (f_n) *konvergiert schwach* gegen f, falls für alle $g \in L^q(\mu)$

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n g d\mu = \int f g d\mu$$

gilt. Wir schreiben auch $f_n \rightharpoonup f$. Zeige, daß die Konvergenz von (f_n) gegen f bezüglich $\|\cdot\|_p$ (die sogenannte *starke Konvergenz*) die schwache Konvergenz von (f_n) gegen f impliziert, die Umkehrung im allgemeinen jedoch nicht gilt.

Aufgabe 4: **7 Punkte**

Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{A}, \lambda)$ mit der Lebesgue-σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und dem eindimensionalen Lebesgue-Maß λ.

(i) Zeige, daß die Menge der Funktion $f \in L^1(\lambda)$ der Gestalt

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{E_k}, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, E_k \in \mathfrak{R}$$

dicht liegt in $L^1(\lambda)$, wobei $\mathfrak{R}$ wie üblich der Ring der endlichen Vereinigungen von Intervallen sei.

(ii) Es sei $C_0(\mathbb{R})$ die Menge der auf $\mathbb{R}$ definierten stetigen Funktionen mit kompaktem Träger[1]. Zeige, daß $C_0(\mathbb{R}) \subset L^1(\lambda)$ und daß sogar $C_0(\mathbb{R})$ dicht liegt in $L^1(\lambda)$.

(iii) Ein Banachraum heißt separabel, falls es eine dichte abzählbare Teilmenge gibt. Zeige, daß $L^1(\lambda)$ separabel ist.

(iv) Zeige schließlich, daß $L^\infty(\lambda)$ nicht separabel ist.
Hinweis: Zeige zunächst die folgende Behauptung: Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und gibt es eine überabzählbare paarweise disjunkte Familie $\{U_i\}_{i \in I}$ von offenen, nichtleeren Teilmengen von V, so ist V nicht separabel.

[1] Der Träger supp(F) einer Funktion f ist definiert durch $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$.