Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2010

# Analysis III

## 7.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 9. / 10. Juni.

**Aufgabe 1:** **4 Punkte**

(i) Bestimme mit Hilfe der Trennung der Veränderlichen eine nichttriviale Lösung des AWP

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}, & t > 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(ii) Zeige, daß für jedes $t_0 > 0$ die Funktion

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < t_0 \\ 1/4(t - t_0)^2, & \text{falls } t \geq t_0 \end{cases}$$

das AWP löst, dieses also mitnichten eindeutig lösbar ist.

**Aufgabe 2:** **4 Punkte**

Bestimme jeweils die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen und löse anschließend das entsprechende Anfangswertproblem.

(i) $y' = ty^{-1}(1 + y^2), \qquad y(0) = 1.$

(ii) $y' + 2y = \sin(t), \qquad y(0) = 0.$

(iii) $y' = y\sin(t), \qquad y(\pi/2) = 1.$

(iv) $y' = t^2/y^2, \qquad y(0) = 1$

**Aufgabe 3:** **4 Punkte**

Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = y/t + \ln(t), \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

und gib das maximale Existenzintervall der Lösung an.

**Aufgabe 4:** **4 Punkte**

Eine Bernoulli-Differentialgleichung ist von der Form

$$u'(t) + p(t)u(t) = r(t)u(t)^n, \qquad t > 0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Für $n \geq 2$ ist diese DGL nichtlinear, läßt sich jedoch mittels der Substitution

$$v(t) = u(t)^k$$

für ein geeignetes $k$ in eine lineare Differentialgleichung umformen. Führe diese Umformung durch und bestimme so $k$ in Abhängigkeit von $n$.
Löse weiterhin mit dieser Methode die Bernoulli-Gleichung

$$u' + \frac{u}{t} = t^2 u^2.$$

**Aufgabe 5:** **4 Punkte**

Für eine Bakterienkultur sei die Wachstumsrate $N'$ proportional zur Anzahl $N$ der vorhandenen Bakterien, d.h. $N' = \omega N$ (Welche idealisierende Annahme wird hier gemacht?)

(i) Zeige, daß die Zeit $\tau$, in der sich die Bakterienzahl verdoppelt, konstant ist. Hierzu kann man die durch $g(t, \tau) := N(t + \tau) - 2N(t) = 0$ implizit definierte Funktion $\tau = \tau(t)$ betrachten.

(ii) Drei Stunden nach dem Ansetzen der Kultur werden $2^{18}$ Bakterien und nach zwei weiteren Stunden werden $2^{30}$ Bakterien gezählt. Wie viele waren es beim Ansetzen der Kultur?