Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Sommersemester 2010

Analysis III

8.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 16. / 17. Juni

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Die Funktion $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfülle die Voraussetzungen des Satzes von Picard-Lindelöf. Es seien $y_j : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $j = 1,2$ Lösungen der AWP

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b], \\ y(t_0) = y_j^0. \end{cases}$$

Zeige: Ist $y_1(\bar{t}) \neq y_2(\bar{t})$ für ein $\bar{t} \in [a,b]$, so ist $y_1 \neq y_2$ auf $[a,b]$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Wir betrachten das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = ty^2(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Zeige, daß für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ lokal genau eine Lösung existiert.
Bestimme weiterhin für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung des AWP mit maximalem Definitionsbereich und skizziere den qualitativen Verlauf der Lösungen für $y_0 = -2, -1, 0, 1, 2$ in einem gemeinsamen Schaubild.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Betrachte für $a, b > 0$ das AWP

$$\begin{cases} y'(t) = (a - by(t))y(t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) = y_0 \geq 0. \end{cases}$$

(i) Zeige zunächst, daß für beliebige $y_0 \geq 0$ eine eindeutige Lösung mit maximalem Definitionsbereich existiert. Hierzu führe, falls die Wahl von y_0 dies zulässt, die Funktion $z(t) := 1/y(t)$ ein und überführe das obige AWP in eines für z.

(ii) Für welche Werte von $y_0 \geq 0$ ist $y'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder $y'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? Bestimme in Abhängigkeit von y_0 den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} y(x)$ und fertige eine Skizze an, die den qualitativen Verlauf der Lösungen für verschiedene y_0 wiedergibt. (Hinweis: Aufgabe 1).

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Gegeben seien ein Intervall $I = [0, T]$, eine stetige Funktion $K : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der Abschätzung

$$|K(x, t, z_1) - K(x, t, z_2)| \leq e^{-t}|z_1 - z_2|$$

genügt für alle $x, t \in I$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $g : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, daß es genau eine stetige Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$y(x) = g(x) + \int_0^x K(x, t, y(t))dt.$$

Zusatzaufgabe 1: **? Zusatzpunkte**

Fußball-WM-Bonus: Erwählt Eure Lieblingsmannschaft und schreibt den entsprechenden Namen auf Eure Abgabe. Für jedes Tor, daß die entsprechende Mannschaft im Laufe dieser WM schießt[1], gibt es für Euch einen Extrapunkt.

[1] Das Kleingedruckte: Eigentore und Tore in eventl. Elfmeterschießen zählen nicht...