Klausur - Analysis II
Lösungsskizzen

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie wahre Aussagen mit **W** und falsche Aussagen mit **F**. Es sind keine Begründungen nötig. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen, nicht beantwortete Teilaufgaben werden nicht bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl ist Null.

- [W] Es sei Ω eine nichtleere Menge und $\mathfrak{A} = P(\Omega)$, die Potenzmengen-σ-Algebra auf Ω. Dann ist jede Funktion $f : \Omega \to \Omega$ meßbar (genauer: $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}$-meßbar).
- [F] Jede stetige Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ist Lebesgue-integrierbar.
- [F] Es sei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ und $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ integrierbare Funktionen. Gilt $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$, so ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- [F] Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ stetig. Sind dann u_1 und u_2 Lösungen der inhomogenen Gleichung $u'(t) = Au(t) + b(t)$, $t \in \mathbb{R}$, so ist auch $u_1 + u_2$ eine Lösung dieser Gleichung.
- [W] Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein offenes Rechteck, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und γ eine geschlossene Kurve in G. Dann gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
- [F] Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = 0$ für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ und $f(2) = 1$.

---

ad (i) Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Meßbarkeit einer Funktion.

ad (ii) Gegenbsp. $f(x) = 1/x$.

ad (iii) Gegenbsp. $f = \chi_{\mathbb{Q}}$.

ad (iv) Einsetzen. Falls $B \neq 0$, so ist die Aussage falsch.

ad (v) Da Rechtecke konvex sind, folgt die Behauptung aus dem Cauchyschen Integralsatz für konvexe Gebiete.

ad (vi) Ist $f = 0$ auf $B(0,1)$ und f holomorph auf $\mathbb{C}$, so ist nach dem Eindeutigkeitssatz $f = 0$ auf ganz $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei

$$B := \left\{(0,\infty), (-1,1), (-\frac{1}{2},\frac{1}{2}), (-\frac{1}{3},\frac{1}{3}), (-\frac{1}{4},\frac{1}{4}), \dots\right\}$$

und sei $\mathfrak{A}$ die kleinste σ-Algebra über $\mathbb{R}$, die B enthält.

(a) Gehört das Intervall $(-\infty, 0)$ zu $\mathfrak{A}$?

(b) Ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ 1, & \text{falls } x > 0, \end{cases}$$

bezüglich $\mathfrak{A}$ meßbar?

(i) Da $\mathfrak{A}$ als σ-Algebra abgeschlossen ist unter abzählbaren Schnitten, Vereinigungen und Komplementbildung, so ist zunächst $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n) \in \mathfrak{A}$, dann $[0,\infty) = \{0\} \cup (0,\infty) \in \mathfrak{A}$ und schließlich $(-\infty, 0) = [0,\infty)^c \in \mathfrak{A}$.

(ii) Mit $A = (-\infty, 0)$ und $B = (0,\infty)$ sind, wie in (i) gesehen, $A, B \in \mathfrak{A}$. Damit ist $f = \chi_B - \chi_A$ als Treppenfunktion meßbar.
Alternativ per Definition der Messbarkeit.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} e^{-x} \big(\cos(x)\big)^n \,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Untersuchen Sie zunächst den Integranden auf punktweise Konvergenz.

Zunächst ist $|e^{-x}\cos^n(x)| \leq |\cos(x)^n|$. Damit konvergiert der Integrand gegen 0, falls $x \notin N = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Nun ist N abzählbar und damit eine Nullmenge in $\mathbb{R}$, weshalb der Integrand fast überall gegen 0 konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|e^{-x}\cos^n(x)| \leq e^{-x}$$

und es ist

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}|_1^\infty = 1/e < \infty,$$

also ist $x \mapsto e^{-x}$ eine integrierbare Majorante und nach dem Konvergenzsatz von Lebegsue folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[1,\infty)} e^{-x} \big(\cos(x)\big)^n \,\mathrm{d}x = \int_{[1,\infty)} 0 \,\mathrm{d}x = 0.$$

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei mit λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$ bezeichnet. Wir betrachten die Funktionenfolge (f_n), die für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]}(x), \quad x \in [0,1],$$

gegeben ist.

Entscheiden Sie (mit Begründung), ob diese Funktionenfolge im jeweiligen Sinne für $n \to \infty$ gegen die Nullfunktion konvergiert.

(i) punktweise

(ii) gleichmäßig

(iii) fast überall bezüglich λ

(iv) bezüglich der L^1-Norm $\|\cdot\|_1$

(v) bezüglich der L^2-Norm $\|\cdot\|_2$.

(i) Wahr: Für festes $x \in (0,1]$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $2^n > 1/x$: $f_n(x) = 0$. Für $x = 0$ gilt dies sogar für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Falsch: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt mit $x_n = 1/2^n$: $|f_n(x_n)| = 2^{n/2} > 1$, also $\|f_n - 0\|_\infty \geq 1$.

(iii) Wahr: Folgt unmittelbar aus (i).

(iv) Wahr: Setzen wir $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{-(n+1)}}} \chi_{[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]}$, so ist $f_n \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\int_{[0,1]} g d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}^{n+1} \left(1/2^n - 1/2^{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2}^{n+1} \, 2^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{2}^{n+1} < \infty.$$

Damit ist g eine integrierbare Majorante und die Behauptung folgt aus dem Satz von Lebesgue.

Leichter sieht man dies durch simple Integration von $\|f_n\|_1 = \int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \to 0$.

(v) Falsch: Setzen wir $g_n = \frac{1}{\sqrt{2^{-n}}} \chi_{[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]}$, so ist $g_n \leq f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit

$$\|f_n - 0\|_2^2 = \int_{[0,1]} |f_n|^2 d\lambda \geq \int_{[0,1]} g_n^2 d\lambda = 2^n \left(1/2^n - 1/2^{n+1}\right) = 2^n \, 2^{-(n+1)} = 1/2.$$

Auch hier sieht man dies leichter durch einfaches Ausrechnen von $\|f_n\|_2^2 = \int_{1/2^{n+1}}^{1/2^n} \frac{1}{x} dx$, welches für $n \to \infty$ nicht gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 5: **5 Punkte**

(i) Bestimmen Sie explizit die Lösung $u : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$u'(t) = e^{u(t)} \sin(t), \quad u(0) = 0,$$

sowie das maximale Existenzintervall I.

(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem $u'(t) - 2tu(t) + t = 0$ zum Anfangswert $u(0) = 0$.

(i) Trennung der Veränderlichen liefert

$$\int_0^{u(t)} \frac{1}{e^y} dy = \int_0^t \sin(s) ds,$$

also

$$-e^{-y}|_0^{u(t)} = -\cos(s)|_s^t,$$

also

$$1 - e^{-u(t)} = 1 - \cos(t)$$

und schließlich

$$u(t) = -\ln(\cos(t)).$$

Die Lösung u ist also definiert, solange $\cos(t) > 0$ ist, das maximale Existenzintervall ist folglich gegeben durch $I_{max} = (-\pi/2, \pi/2)$.

(ii) Formel von Duhamel bzw. Variation der Konstanten mit $a(t) = 2t$ und $b(t) = -t$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \exp(\int_0^t 2s ds) \cdot 0 - \exp(\int_0^t 2s ds) \int_0^t \exp(-\int_0^s 2\tau d\tau) s ds \\ &= -\frac{1}{2} e^{t^2} \int_0^{t^2} e^{-r} dr = \frac{1}{2}(1 - e^{t^2}). \end{aligned}$$

Aufgabe 6: **5 Punkte**

(i) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, deren Realteil durch

$$\mathrm{Re} f(x+iy) = x^3 - 3xy^2, \quad x+iy \in \mathbb{C},$$

gegeben ist.

(ii) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Es sei weiterhin $z_0 \in G$. Zeigen Sie, daß für ein hinreichend kleines $r > 0$ gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

(i) Mit $u(x,y) = \mathrm{Re} f(x+iy) = x^3 - 3xy^2$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -6xy,$$

aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgt somit für $v(x,y) := \mathrm{Im} f(x+iy)$:

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 6xy$$

und

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2xy^2.$$

Hieraus erhalten wir beispielsweise $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ und da sowohl u, als auch v differenzierbar sind, so ist $f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$ eine holomorphe Funktion.

(ii) Es sei $r > 0$ so klein, daß $B(z_0, 2r) \subset G$. Da G offen ist, ist die Existenz eines solchen r stets gesichert. Mit $\gamma : [0, 2\pi] \to G$, $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$, also $\gamma'(t) = ire^{it}$, folgt aus der Cauchy-Integralformel:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$