Tutorien am 23. / 24. 7.

Aufgabe 1:
Löse das folgende RWP:

$$\begin{cases} -u''(x) - 4u(x) = 0, & x \in (-\pi, \pi), \\ u(-\pi) = u(\pi), \\ u'(-\pi) = u'(\pi) \end{cases}$$

Aufgabe 2:
Betrachte die DGL

$$a_n t^n y^{(n)}(t) + a_{n-1} t^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = 0,$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

1. Schreibe die DGL um in ein System erster Ordnung.
2. Zeige: Ist y eine Lösung der DGL auf $(0, \infty)$, so löst $u(t) := y(e^t)$ auf $\mathbb{R}$ eine DGL mit konstanten Koeffizienten (Nämlich welche?). Ist umgekehrt u eine Lösung letzterer DGL, so löst $y(t) := u(\ln(t))$ die obige DGL auf $(0, \infty)$.
3. Löse die DGL
$$t^4 y^{(4)}(t) + 3t^2 y'' - 7ty' + 8y = 0$$
auf $(0, \infty)$.

Aufgabe 3:
Seien $a > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$. Formuliere die Differentialgleichung

$$u''(t) + 2\delta u'(t) + au(t) = 0, \quad t \in [0, \infty),$$

um in ein System 1. Ordnung und untersuche dessen Nulllösung auf (asymptotische) Stabilität in Abhängigkeit von δ.

Aufgabe 4:
Eine Kekspopulation werde durch die Gleichung

$$u' = -\frac{u(u-1500)}{3200}$$

modelliert, wobei $u(t)$ die Anzahl der Kekse und t die Zeit in Minuten ist. Wird nun Keksessern erlaubt, eine Anzahl s von Keksen zu vertilgen, wird ihre Gesamtpopulation durch die Gleichung

$$u' = -\frac{u(u-1500)}{3200} - s \tag{1}$$

beschrieben.
Finde alle Gleichgewichtspunkte u_s der Gleichung (1) in Abhängigkeit des Parameters $s \geq 0$ und untersuche deren Stabilitätsverhalten. Wie groß darf s höchstens sein, damit die Kekse nie aussterben[1]?

[1] Es handelt sich hierbei um die höchst seltene Art der selbsreproduzierenden Kekse!