Tutorien am 12. / 13. Mai

Aufgabe 1:
Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrierbar. Zeige, daß die Folge (f_n) mit $f_n := f\chi_{[-n,n]^d}$ in L^1 gegen f konvergiert.

Aufgabe 2:
Zeige, daß im Satz über die monotone Konvergenz alle Voraussetzungen notwendig sind.

Aufgabe 3:
Beweise folgende sehr oft verwendete Variante des Satzes von Lebesgue:
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) < \infty$. Es sei weiterhin (f_n) eine Folge meßbarer Funktionen auf A, die beschränkt ist, d.h. es gibt $C > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|f_n| \leq C$ f.ü. in A. Weiterhin konvergiere (f_n) f.ü. gegen eine Funktion f. Dann sind sowohl alle f_n als auch f integrierbar und es gilt $\lim_n \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

Aufgabe 4:
Zeige, daß integrierbare Funktionen fast überall endlich sind. Zeige weiterhin, daß $\int_A f d\mu = 0$, falls A eine μ-Nullmenge ist.

Aufgabe 5:
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) := \begin{cases} \big(\cos(1/x)\big)^n, & \text{falls } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Bestimme den folgenden Grenzwert, falls er exisiert:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n d\lambda^1.$$

Aufgabe 6:
Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n)dx = f(0)$.

Aufgabe 7:
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$. Entscheide und beweise, welche der folgenden Aussagen wahr sind und welche falsch.

(i) f ist genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist.

(ii) f ist genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar und f meßbar ist.