Tutorien am 19. / 20. Februar

Sofern nicht anders vermerkt, sei auf diesem Blatt $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Aufgabe 1:
Es sei $1 \leq p < \infty$ und $f_n, f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$ mit $f_n \to f$ f.ü.

(i) Zeige, daß nicht notwendigerweise $\|f_n - f\|_p \to 0$.

(ii) Falls aber zusätzlich $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, so folgt $\|f_n - f\|_p \to 0$.
Hinweis: Zeige zunächst, $0 \leq 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ und verwende das Lemma von Fatou.

Aufgabe 2:
Es sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$. Zeige die *Chebyshevsche Ungleichung*:
Für $\epsilon > 0$ gilt

$$\mu(\{x \in \Omega \mid |f(x)| > \epsilon\}) \leq \frac{\|f\|_p^p}{\epsilon^p}.$$

Hinweis: $|f| \geq \epsilon \chi_{\{|f(x)|>\epsilon\}}$.
Sei nun μ endlich. Ist $f_n, f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$ mit $f_n \to f$ in $\mathscr{L}^p$, so zeige, daß dann auch f_n gegen f dem Maße nach konvergiert[1]

Aufgabe 3:
Wir definieren

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \mid \exists c > 0 : \mu(\{x \in \Omega \mid |f(x)| > c\}) = 0\}.$$

und für $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)$:

$$\|f\|_\infty := \inf\{c > 0 \mid \mu(\{|f| > c\}) = 0\}.$$

(i) Zeige, daß

$$\|f\|_\infty = \inf_{N \in \mathfrak{A}, \mu(N)=0} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)|.$$

Aus diesem Grund wird $\|f\|_\infty$ das *wesentliche Supremum* von f genannt.

(ii) Zeige, daß $(\mathscr{L}^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ ein vollständiger halbnormierter Raum ist.

(iii) Ist $p = 1$ so gibt es kein $q \in \mathbb{R}$ mit $1/p + 1/q = 1$. Wir können aber formal $1/\infty = 0$ setzen. Zeige, daß in diesem Sinne die Hölder-Ungleichung für $p = 1$ und $q = \infty$ gilt.

[1] Erinnerung: $f_n \to f$ dem Maße nach, falls für jedes $\epsilon > 0$: $\lim \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0$.

(iv) Zeige, daß für $f \in \mathscr{L}^\infty([0,1])$ gilt: $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Aufgabe 4:
Zeige, daß das Dirac-Maß keine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}$ hat.