Tutorien am 26. / 27. Mai

Aufgabe 1:
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeige, daß die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) Es gibt $E_n \in \mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt mit $\mu(E_n) < \infty$ und $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

(ii) Es gibt $E_n \in \mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\mu(E_n) < \infty$ und $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

(iii) Es gibt $E_n \in \mathfrak{A}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(E_n) < \infty$, $E_n \subset E_{n+1}$ und $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Aufgabe 2:
Zeige, daß die Menge

$$\{1, \cos(k\cdot), \sin(k\cdot) \,|\, k \in \mathbb{N}, k \geq 1\}$$

eine Orthonormalbasis von $L^2([-\pi, \pi])$ bildet, daß also alle Funktionen $f \in L^2([-\pi, \pi])$ in der Form

$$f = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\cdot) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\cdot)$$

geschrieben werden können, wobei

$$a_0 = (f, 1), \quad a_k = (f, \cos(k\cdot)), \quad b_k = (f, \sin(k\cdot))$$

ist.

Aufgabe 3:
Man erinnere sich daran, daß $C([-\pi, \pi]) \subset L^2([-\pi, \pi])$ gilt (warum?).
Sei $f \in C([-\pi, \pi])$. Zeige:
Ist f eine gerade Funktion, so gilt $b_k = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Ist f eine ungerade Funktion, so gilt $a_k = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4:
Bestimme die Fourierreihe (berechne also die Fourrierkoeffizienten der folgenden Funktionen:

$$f = \chi_{[0,\pi]}, \qquad g(x) := x^2.$$

Aufgabe 5:
Es seien $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ (nichtleere) Grundmengen und $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ σ-Algebren auf den entspr. Mengen. Es seien weiterhin $\pi_j : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_j$, $j = 1, 2$, die kanonischen Projektionen. Zeige, daß eine Funktion $f : \Omega \to \Omega_1 \times \Omega_2$ genau dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$-meßbar ist, wenn die Abbildungen $\pi_j \circ f$ $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_j$-meßbar sind.