Tutorien am 10. / 11. Februar

Aufgabe 1:
(Methode der sukkzessiven Approximation) Zum Lösen der Fixpunktgleichung

$$Tv = v,$$

wobei T ein Operator eines Banachraumes in sich ist, benutzt man häufig das *Verfahren der sukkzessiven Approximation.* Ausgehend von einem beliebigen Element x_0 berechnet man nacheinander die Elemente

$$x_1 = Tx_0,\ x_2 = Tx_1, \ldots, x_{n+1} = Tx_n, \ldots$$

Wir haben beispielsweise mit dem Banachschen Fixpunktsatz Bedingungen kennengelernt, unter denen dieses Verfahren gegen einen Fixpunkt von T konvergiert. Brechen wir die Iteration nach endlich vielen Schritten ab, so ist zu erwarten, daß das zuletzt erzeugte Element eine recht gute Näherung an die exakte Lösung ist.

Ein uns schon bekannter Spezialfall ist die *Picard-Iteration*, die wir anwenden, um eine Lösung des AWP

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

zu konstruieren. Dabei setzen wir bekanntermaßen

$$(Tu)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds,$$

verwenden also die Iteration

$$u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_n(s))ds,$$

ausgehend von einer beliebigen Startfunktion $u_0(t)$, man kann beispielsweise $u_0(t) \equiv u_0$ wählen.
Löse mit Hilfe der Picard-Iteration die AWP

$$\begin{cases} u'(t) = u(t), \\ u(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \begin{cases} u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t), \\ u(0) = (0,1)^T. \end{cases}$$

Aufgabe 2:
Ein Vektorfeld $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ heißt *Kraftfeld*, falls der Vektor $F(x)$ eine Kraft darstellt, die auf eine im Punkt x befindliche Masse m wirkt. Die Bahnkurve eines Teilchens mit der Masse m wird dann beschrieben durch das System $m\ddot{x} = F(x)$.
Ein Kraftfeld heißt *konservativ*, falls es ein Feld $V \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ gibt mit $F(x) = -\nabla V(x)$ (V heißt dann *Potential* von F).
Ein Kraftfeld heißt *zentral*, falls es ein Feld $\lambda \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ gibt mit $F(x) = \lambda(x)x$ in $\mathbb{R}^3$.

(i) Sei $x(t)$ die Bahnkurve eines Teilchens mit Masse m in einem konservativen Kraftfeld. Zeige, daß die Gesamtenergie $E(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V(x(t))$ während der Bewegung erhalten bleibt, also $E(t) \equiv const.$ gilt.

(ii) Zeige, daß die Bahnkurven $x(t)$ in einem zentralen Kraftfeld ebene Kurven sind (Betrachte $x(t) \times \dot{x}(t)$).

Wir betrachten die skalare Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t))).$$

Anschaulich bedeutet $u' = f(t, u)$ ein sogenanntes *Richtungsfeld*, d.h. die Differentialgleichung ordnet jedem Punkt (t, u) eine Steigung $f(t, u)$ zu. Man zeichnet dies meist, indem man am Punkt (t, u) ein kleines Geradenstück mit Steigung $f(t, u)$ einzeichnet. Unter den *Isoklinen* versteht man die Kurven durch die Punkte gleicher Steigung, die also durch $f(t, u) = const.$ gegeben sind. Lösungskurven sind schließlich Kurven, die in jedem Punkt (t, u) die Steigung $f(t, u)$ haben, somit also Lösungen der Differentialgleichung beschreiben. Ist das zur o.a. DGL gehörende AWP für jedes t_0 und u_0 eindeutig lösbar, so geht durch jeden Punkt (t, u) genau eine Lösungskurve.

Aufgabe 3:
Skizziere das Richtungsfeld, die Isoklinen und die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$u'(t) = u(t).$$

Vergleiche die Skizzen mit den exakten Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten.

Aufgabe 4:
Skizziere das Richtungsfeld, die Isoklinen und die Lösungskurven der Differentialgleichung

$$u'(t) = u(t)^2 - t.$$

Bestimme dazu Gebiete, in denen die Lösung wächst/fällt bzw. konkav/konvex ist.
Zeige, daß diese Differentialgleichung zu jedem Anfangswert genau eine Lösung besitzt.
Im Fall $u(0) = 0$ ist die Lösung für positive t negativ, verläuft jedoch oberhalb der Parabel $t = u^2$.