Tutorien am 16. / 17. Juni

Aufgabe 1:
Berechne die Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1/2 & -4 & -5 \\ 1/2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

für

$$(a) \;\; u_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad (b) \;\; u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:
Berechne die Lösung von

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = 0, & t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:
Es sei W die Wronskideterminante eines Fundamentalsystems des homogenen linearen Systems $y'(t) = A(t)y(t)$. Zeige:

(i) W erfüllt die Differentialgleichung $W' = \operatorname{tr}(A(t))\, W$, wobei tr die Spur der Matrix bezeichnet.

(ii) Folglich gilt $W(t) = W(t_0) \exp\big(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}(A(s))ds\big)$.

Aufgabe 4:
(Reduktionsverfahren) Wir betrachten die lineare homogene Differentialgleichung

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0$$

in $\mathbb{R}^n$. Dies ist also ein $n-$dimensionales System. Ist nun eine Lösung bekannt, so können wir diese nutzen, um das System auf ein System $(n-1)$-ter Ordnung zurückzuführen.

Sei also u eine Lösung des Systems. Wir machen nun den Ansatz

$$v(t) = \phi(t)u(t) + z(t),$$

wobei ϕ eine skalare Funktion ist und $z(t) = (0, z_2(t), \ldots, z_n(t))^T$. Wir erhalten dann

$$v' = \phi' u + \phi u' + z'$$

und eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt dies

$$z' = -Az - \phi' u.$$

Für die erste Komponente bedeutet dies

$$-\sum_{j=2}^{n} a_{1j} z_j = \phi' u_1$$

und für die weiteren Komponenten

$$z_i' = -\sum_{j=2}^{n} a_{ij} z_j - \phi' u_i,$$

$i = 2, \ldots, n$. Zusammen ergeben sich die $n-1$ Differentialgleichungen

$$z_i' = \sum_{j=2}^{n} (-a_{ij} + a_{1j} u_i / u_1) z_j,$$

$i = 2, \ldots, n$ (Wir haben angenommen, daß $u_1 \neq 0$. Gilt dies nicht, so nimmt man einfach eine andere Komponente.) Sind nun $z_2, \ldots z_n$ Lösungen dieses reduzierten Systems, so berechnen wir ϕ durch Integration aus

$$\phi' = -\big(\sum_{j=2}^{n} a_{1j} z_j\big)/u_1$$

und damit erhalten wir durch Einsetzen $n-1$ weitere Lösungen $v_1, \ldots, v_{n-1}$ unseres ursprünglichen Systems.

Finde mit dieser Methode die allgemeine Lösung des Systems

$$u'(t) + \begin{pmatrix} -t^2 & 3t^2 \\ -t^2/3 & t^2 \end{pmatrix} u(t) = 0.$$

Eine Lösung ist natürlich $u(t) = (3, 1)^T$.