Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. K. Ammar, J. Rohleder

Sommersemester 2010

# Funktionalanalysis I
## 0. Übungsblatt

(Ein wenig Wiederholung aus LinA: Vektorräume, Quotientenräume)

Abgabe vor den Tutorien am 21. / 22. / 23. April

---

**Aufgabe 1:** (2 Punkte)
Es seien $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum[1] und $U, W$ zwei Untervektorräume von $V$ mit $V = U \cup W$. Zeige, dass dann entweder $U = V$ oder $W = V$ gilt.

**Aufgabe 2:** (2 Punkte)
Bekanntlich ist ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums genau dann injektiv, wenn er surjektiv ist. Zeige, dass in unendlichdimensionalen Vektorräumen keine dieser Implikationen gilt: Betrachte dazu den Linksshift $L : \ell^2 \to \ell^2, (a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots)$ und den Rechtsshift $R : \ell^2 \to \ell^2, (a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots)$. (Es braucht nicht gezeigt zu werden, dass $L$ und $R$ Endomorphismen von $\ell^2$ sind – macht es euch aber bitte trotzdem klar!)

**Aufgabe 3:** (3 Punkte)
Es seien $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U, W$ Untervektorräume von $V$ mit $V = U \dotplus W$.[2] Zeige, dass $W$ und der Quotientenraum $V/U$ isomorph sind.

**Aufgabe 4:** (3 Punkte)
Es seien $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{B} := \{b_j : j \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $V$. Weiter sei $I \subset \mathbb{N}$ eine Indexmenge und $U$ der von der Familie $\{b_j : j \in I\}$ aufgespannte Untervektorraum. Konstruiere mit Hilfe von $\mathcal{B}$ eine Basis des Quotientenraums $V/U$. (Selbstverständlich muss gezeigt werden, dass es sich um eine Basis handelt.)

Gesamtpunktzahl: 10

---

Alle Informationen zu dieser Lehrveranstaltung sowie die Übungsblätter findet ihr unter `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe10/FA1`.

**Wir erwarten lesbare, sauber aufgeschriebene, strukturierte Lösungen!**

---

[1] Wir vereinbaren hier für das gesamte Semester, dass $\mathbb{K}$ stets für einen der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ stehen soll.

[2] Wie ihr wisst, bedeutet dies, dass $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$ gelten. Man nennt $W$ dann auch einen zu $U$ komplementären Untervektorraum (und umgekehrt).