Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. K. Ammar, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
1. Übungsblatt

(Metrische Räume, Vollständigkeit)

Abgabe vor den Tutorien am 28./29./30. April

Hausaufgaben

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige: Konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} d(x_j, x_{j+1})$ (in $\mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik), so ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge (bzgl. d). Bleibt diese Aussage richtig, wenn man anstatt der Konvergenz der Reihe die (schwächere) Voraussetzung stellt, dass $(d(x_n, x_{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist?

Aufgabe 2: (6 Punkte)

(i) Zeige, dass in jedem metrischen Raum (X, d) für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ die „abgeschlossene Kugel“ $\{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ abgeschlossen ist, aber im Allgemeinen nicht mit dem Abschluss der offenen Kugel $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ übereinstimmt.[1]

(ii) Auf der nichtleeren Menge X sei $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Metriken. Weiter sei $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$ konvergiert. Zeige, dass dann

$$d(x, y) := \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{d_j(x, y)}{1 + d_j(x, y)}, \quad x, y \in X,$$

eine Metrik auf X definiert.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Zeige, dass für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, die Abbildung

$$d_1 : C([a, b]) \times C([a, b]) \to \mathbb{R}, \quad (f, g) \mapsto \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x,$$

eine Metrik auf dem Raum $C([a, b])$ der stetigen Funktionen ist. Untersuche, ob der metrische Raum $(C([a, b]), d_1)$ vollständig ist (mit Beweis).

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Zeige, dass die Abbildung

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|,$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist. Zeige weiter, dass die von d auf $\mathbb{R}$ erzeugte Topologie mit der euklidischen Topologie übereinstimmt, dass aber $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist.[2]

Gesamtpunktzahl: 20

---

[1] Man kann immerhin zeigen, dass die letzte Aussage in jedem *normierten Vektorraum* für die von der Norm erzeugte Metrik wahr ist.

[2] Wir werden später sehen, dass $\mathbb{R}$ als endlichdimensionaler Vektorraum mit jeder Norm vollständig ist. Die hier gegebene Metrik kann also von keiner Norm abstammen!

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:

Zeige:

(i) Auf dem Raum ℓ^∞ der beschränkten Folgen in $\mathbb{K}$ definiert

$$d(x,y) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty,$$

eine Metrik.

(ii) Sei X eine nichtleere Menge, ausgestattet mit der *diskreten Metrik*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Wie sehen die konvergenten Folgen und die Cauchyfolgen im metrischen Raum (X,d) aus? Unter welchen Voraussetzungen ist (X,d) vollständig?

Aufgabe 2:

Zeige, dass jeder metrische Raum (X,d) die *Hausdorff-Eigenschaft* besitzt: Zu $x, y \in X$ existieren offene Umgebungen U_x, U_y von x bzw. y, die disjunkt sind, $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Aufgabe 3:

Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeige:

(i) Ist (X,d) vollständig und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A mit der durch d induzierten Metrik $d|_{A\times A}$ vollständig.

(ii) Ist $A \subseteq X$ mit der durch d induzierten Metrik vollständig, so ist A abgeschlossen.

Aufgabe 4:

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Zeige: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn in jeder offenen Umgebung von x alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen.

Aufgabe 5:

Sei X eine nichtleere Menge mit zwei Metriken d_1 und d_2. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) d_1 und d_2 erzeugen dieselbe Topologie auf X.[3]

(ii) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ konvergiert genau dann bzgl. d_1 gegen $x \in X$, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. d_2 gegen x konvergiert.

Dies bedeutet aber (im Gegensatz zur Situation in normierten Vektorräumen) noch nicht, dass die Cauchyfolgen bzgl. d_1 und d_2 dieselben sind – vgl. Hausaufgabe 4.

Aufgabe 6:

Laut Vorlesung ist $C^1([-1,1])$ mit der Supremumsmetrik nicht vollständig. Zeige, dass die Abbildung

$$d' : C^1([-1,1]) \times C^1([-1,1]), \quad (f,g) \mapsto \sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[-1,1]} |f'(x) - g'(x)|,$$

eine Metrik auf $C^1([-1,1])$ ist, und untersuche, ob $(C^1([-1,1]), d')$ vollständig ist.

---

[3]Das heißt, dass die offenen Mengen bzgl. d_1 genau die offenen Mengen bzgl. d_2 sind.