Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
10. Übungsblatt
(Kompakte Operatoren, adjungierter Operator)

Abgabe vor den Tutorien am 30. Juni/1./2. Juli

Hausaufgaben

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Seien X, Y Banachräume.

(i) Es sei $T : X \to Y$ ein kompakter Operator. Zeige, dass T schwach konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbildet, d.h.

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X, x_n \rightharpoonup x \in X, n \to \infty, \quad \Longrightarrow \quad Tx_n \to Tx, n \to \infty. \tag{⚽}$$

(ii) Nun sei zusätzlich X reflexiv. Zeige, dass die Bedingung (⚽) dann die Kompaktheit von T impliziert.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Für jede Folge $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ und jedes $p \in [1, \infty]$ ist

$$M : \ell^p \to \ell^p, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ein wohldefinierter, linearer, stetiger Operator, vgl. 4. Übungsblatt. Zeige, dass der Operator M genau dann kompakt ist, wenn $m \in c_0$ gilt.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein isometrischer Isomorphismus. Zeige, dass dann auch der adjungierte Operator T' von T ein isometrischer Isomorphismus ist. Zeige weiter, dass auch die Umkehrung gilt, wenn X reflexiv ist.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Seien X ein Banachraum und $T \in \mathfrak{S}_\infty(X)$ ein kompakter Operator. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) $\dim \ker(I - T) < \infty$.

(ii) Ist $I - T$ bijektiv, so ist $(I - T)^{-1}$ stetig. (Verwendet dabei **nicht** den Satz von der offenen Abbildung bzw. dessen Korollare!)

(iii) Ist $\dim X = \infty$, so gilt

$$\operatorname{dist}(I, \mathfrak{S}_\infty(X)) := \inf_{K\in\mathfrak{S}_\infty(X)} \|I - K\| = 1.$$

(Tipp: Schreibe einen kompakten Operator K als $K = I - (I - K)$ und wende den Satz von der Neumannschen Reihe an.)

Zusatzaufgabe: (3 Zusatzpunkte)

Zeige, dass die Menge

$$Q := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty : |x_n| \le \frac{1}{n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \right\}$$

in ℓ^∞ kompakt ist.
Hinweis: Eine der obigen Aufgaben kann gewinnbringend verwendet werden.

Gesamtpunktzahl: 20

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:

Seien X, Y, Z normierte Räume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Zeige, dass das Produkt ST kompakt ist, sobald auch nur einer der Operatoren S bzw. T kompakt ist. Gilt das auch für die Summe $S+T$ (falls $S, T \in \mathcal{L}(X,Y)$)?

Aufgabe 2:

Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Wie für lineare Funktionale (vgl. Tutorium zum 9. Übungsblatt) existiert dann ein injektiver linearer Operator $\hat{T} : X/\ker T \to Y$, so dass $T = \hat{T}\circ Q$ gilt mit

$$Q : X \to X/\ker T, \quad x \mapsto [x].$$

(i) Zeige, dass $\hat{T}$ stetig ist, und dass $\|\hat{T}\| = \|T\|$ gilt.

(ii) Zeige, dass T genau dann kompakt ist, wenn $\hat{T}$ kompakt ist.

Aufgabe 3:

Sei $k \in C([0,1]\times[0,1])$. Zeige, dass der Integraloperator

$$T_k : C([0,1]) \to C([0,1]), \quad (T_k f)(s) = \int_0^1 k(s,t)f(t)\mathrm{d}t$$

wohldefiniert und kompakt ist.

Aufgabe 4:

Zu $f \in L^1([0,1])$ sei $(f_n^\#)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$f_n^\# = \int_0^1 f(t)t^n \mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N},$$

definiert. Zeige, dass

$$T : L^1([0,1]) \to c_0, \quad f \mapsto (f_n^\#)_{n\in\mathbb{N}}$$

ein wohldefinierter, linearer, stetiger Operator ist, und berechne $T' : \ell^1 \to L^\infty([0,1])$ (bis auf die Isomorphismen, die c_0' mit ℓ^1 bzw. $(L^1([0,1]))'$ mit $L^\infty([0,1])$ identifizieren).