Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
11. Übungsblatt
(Annihilatoren, Hilberträume)

Abgabe vor den Tutorien am 7./8./9. Juli

*** Letztes Übungsblatt ***

Hausaufgaben

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Seien X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ eine Teilmenge von X sowie $V \subseteq X'$ eine Teilmenge des Dualraums von X.

(i) Zeige, dass die Annihilatoren $U^\perp$ bzw. $V_\perp$ abgeschlossene Unterräume von X' bzw. X sind.

Nun sei U ein abgeschlossener Unterraum von X.

(ii) Zeige $(X/U)' \cong U^\perp$ und $U' \cong X'/U^\perp$.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Sei $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeige, dass $\mathcal{H}$ genau dann ein Prä-Hilbertraum ist,[1] wenn die *Parallelogramm-Gleichung*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

gilt.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeige, dass $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit der üblichen Operatornorm kein Prä-Hilbertraum (und damit schon gar kein Hilbertraum) ist.
Tipp: Wähle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ orthonormal und betrachte die Operatoren $A, B : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $Ax = (x, \varphi)\varphi$, $Bx = (x, \psi)\psi$, $x \in \mathcal{H}$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Zeige: Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ konvergiert genau dann gegen $x \in \mathcal{H}$, wenn $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$ für $n \to \infty$ gelten.

Gesamtpunktzahl: 20

---

[1] Das heißt, es existiert ein Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf $\mathcal{H}$, so dass $(x, x) = \|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:

Seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ein Operator. Zeige die Identitäten

$$\ker T = (\operatorname{ran} T')_\perp \quad \text{und} \quad \ker T' = (\operatorname{ran} T)^\perp.$$

Aufgabe 2:

Sei $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ ein Prä-Hilbertraum über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.[2] Verifiziere die *Polarisationsformel*

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\right) \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Aufgabe 3:

Zeige, dass jeder Prä-Hilbertraum strikt konvex ist.[3] Zeige außerdem, dass $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ kein Prä-Hilbertraum ist.

Aufgabe 4:

Zeige, dass jeder Hilbertraum reflexiv ist.

Aufgabe 5:

Beweise den Satz von Hahn–Banach im Hilbertraum: Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $U \subseteq \mathcal{H}$ ein Untervektorraum von $\mathcal{H}$ und $f : U \to \mathbb{K}$ ein stetiges, lineares Funktional. Dann existiert ein Funktional $F \in \mathcal{H}'$ mit $\|F\| = \|f\|$ und $F \restriction U = f$.

[2] Analog sieht man im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Formel $(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ ein.

[3] Zur Erinnerung: Ein normierter Raum heißt strikt konvex, falls seine Einheitssphäre kein Geradenstück enthält.