Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. K. Ammar, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
2. Übungsblatt

(Stetigkeitsbegriffe, Banachscher Fixpunktsatz, normierte Vektorräume)

Abgabe vor den Tutorien am 5./6./7. Mai

Hausaufgaben

Aufgabe 1: (5 Punkte)

(i) Zeige, dass $\mathcal{T} := \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist. Gibt es eine Metrik auf $\mathbb{R}$, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert (mit Beweis)?

(ii) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige: f ist genau dann unterhalb stetig auf X, wenn f als Abbildung von (X, d) in den topologischen Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ stetig ist.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Beweise den *Weissingerschen Fixpunktsatz*: Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert. Weiter sei $F : X \to X$ eine Abbildung mit

$$d(F^n(x), F^n(y)) \le a_n d(x, y) \quad \forall x, y \in X, n \in \mathbb{N}.$$

Dann besitzt F genau einen Fixpunkt $\bar{x}$ in X und für jedes $x_0 \in X$ gilt $\lim_{n\to\infty} F^n(x_0) = \bar{x}$.[1]

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Wir statten den Vektorraum $C([0, 1])$ mit den Normen

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, \quad f \in C([0, 1]),$$

aus.

(i) Sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $C([0, 1])$ äquivalent?

(ii) Ist $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ separabel?

(iii) Zeige, dass $C([0, 1])$ mit keiner der beiden obigen Normen strikt konvex ist.[2]

(Wie üblich sind alle Antworten zu beweisen.)

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig.

(ii) Jede absolut konvergente Reihe in $(X, \|\cdot\|)$ konvergiert in X.[3]

Gesamtpunktzahl: 20

---

[1] $F^n(x)$ bezeichnet das Ergebnis der n-fachen Anwendung von F auf x.

[2] Für den Begriff der strikten Konvexität siehe Tutoriumsaufgabe 5 auf der Rückseite.

[3] Aussage (ii) bedeutet: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X, so dass die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert auch die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ in X.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist unterhalb stetig auf X.

(ii) Die Menge $\{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ ist abgeschlossen für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:

(i) Zeige, dass die Gleichung $\cos(x) - x = 0$ genau eine Lösung im Intervall $[0, 1]$ besitzt.

(ii) Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ und $f : K(x_0, \varepsilon) \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionszahl $\lambda \in (0, 1)$, so dass die Ungleichung

$$d(f(x_0), x_0) < \varepsilon(1 - \lambda)$$

erfüllt ist. Zeige, dass f genau einen Fixpunkt besitzt.[4]

Aufgabe 3:

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Es sei $U \subseteq X$ ein Untervektorraum, und U enthalte eine offene Kugel, d.h. es existieren $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, so dass die offene Kugel $B(x, \varepsilon)$ in U enthalten ist. Zeige, dass $U = X$ gilt.

Aufgabe 4:

Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *separabel*, falls eine abzählbare Teilmenge von X existiert, die in X dicht liegt.

(i) Zeige, dass $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ nicht separabel ist.

(ii) Ist $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$ separabel?

Aufgabe 5:

Ein normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|)$ heißt *strikt konvex*, falls die Einheitssphäre $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ *kein* Geradenstück enthält.[5] Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es existieren linear unabhängige $x, y \in X$ mit $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

(ii) Es existieren $x, y \in S, x \neq y$, mit $\|x + y\| = 2$.

(iii) S enthält ein Geradenstück.

Finde außerdem ein Beispiel für einen normierten Vektorraum, der nicht strikt konvex ist.

[4] Hier ist $K(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq \varepsilon\}$.

[5] S enthält genau dann ein Geradenstück, wenn $x, y \in S$ mit $x \neq y$ existieren, so dass $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$ in S enthalten ist.