Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. K. Ammar, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
3. Übungsblatt

(Satz von Picard-Lindelöf, Kompaktheit, Separabilität, ℓ^p-Räume)

Abgabe vor den Tutorien am 12./14. Mai

Hausaufgaben

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) = \cos^2(y(t)) + t, & t \in [0, \pi], \\ y(0) = \pi, \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $y \in C^1([0, \pi])$ besitzt.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

(i) Ist X separabel, so ist auch jede Teilmenge von X separabel.

(ii) Sei $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Untervektorraum von X. Zeige: X ist genau dann separabel, wenn U und X/U separabel sind.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

(i) Finde eine Folge in $\{f \in C([0, 1]) : \|f\|_\infty \leq 1\}$, die keine konvergente Teilfolge enthält. Dies beweist, dass die Einheitskugel in $C([0, 1])$ nicht kompakt ist.

(ii) Gib ein Beispiel für eine unendliche kompakte Teilmenge von $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ (mit Beweis).

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zeige:

(i) Für $1 \leq p < q \leq \infty$ gilt $\ell^p \subset \ell^q$. Zeige auch, dass die Inklusion echt ist.[1] Jede Folge $x \in \ell^p$ erfüllt dann die Abschätzung $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.

(ii) Sei $x \in \ell^1$. Dann gilt $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$, $p \to \infty$.

Gesamtpunktzahl: 20

[1] Das heißt, für $p < q$ existiert eine Folge $x \in \ell^q$ mit $x \notin \ell^p$.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:
Zeige, dass der Raum c_0 der Nullfolgen in $\mathbb{K}$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ und der Raum ℓ^p, $1 \leq p < \infty$, mit der Norm $\|\cdot\|_p$ separabel sind.

Aufgabe 2:
Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(i) Zeige: Ist X kompakt, so ist X separabel.

(ii) Zeige auch: Ist X kompakt, dann ist X präkompakt.

(iii) Bleibt die Folgerung aus (i) richtig, wenn X nur präkompakt ist?

Aufgabe 3:
Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Untersuche, ob die folgenden Aussagen (stets) wahr oder (im Allgemeinen) falsch sind.

(i) Ist f stetig und $K \subseteq X$ kompakt, so ist $f(K)$ ebenfalls kompakt.

(ii) Ist f stetig und $K \subseteq Y$ kompakt, so ist $f^{-1}(K)$ kompakt.

(iii) Ist f Lipschitz-stetig, so ist das Urbild jeder abgeschlossenen Menge $K \subseteq Y$ kompakt.

(iv) Ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

(v) Ist jede Teilmenge von X und von Y kompakt, so ist f stetig.

Aufgabe 4:
Finde eine beschränkte Folge im Raum ℓ^∞, die keine konvergente Teilfolge enthält. Was bedeutet das für die abgeschlossene Einheitskugel?

Aufgabe 5:
Sei X ein endlichdimensionaler Vektorraum. Zeige, dass je zwei Normen auf X äquivalent sind.

Aufgabe 6:
Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X und $[x], [y] \in X/U$. Zeige: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren $\widetilde{x} \in [x]$ und $\widetilde{y} \in [y]$ mit

$$\|\widetilde{x} - \widetilde{y}\| \leq \|[x] - [y]\| + \varepsilon.$$

(Man erinnere sich an die auf dem Quotientenvektorraum X/U kanonisch erklärte Norm, vgl. Vorlesung.)