Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. K. Ammar, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
4. Übungsblatt
(Beschränkte lineare Operatoren)

Abgabe vor den Tutorien am 19./20./21. Mai

Hausaufgaben

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ und $1 \le p < \infty$. Zeige, dass

$$M : \ell^p \to \ell^p, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ein wohldefinierter, beschränkter, linearer Operator ist und berechne $\|M\|$.

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Seien L und R der Links- bzw. Rechtsshift in ℓ^2 wie auf dem 0. Übungsblatt.

(i) Bestimme Kern, Bild und Operatornorm (falls L bzw. R stetig sind) von L und R.

(ii) Zeige, dass $\lim_{n\to\infty} \|L^n x\|_2 = 0$ für jedes $x \in \ell^2$ gilt. Gilt auch $\lim_{n\to\infty} \|L^n\| = 0$?

Aufgabe 3: (6 Punkte)

(i) Seien $1 \le p, q \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, wobei die Konvention $\frac{1}{\infty} = 0$ verwendet wird. Sei $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Zeige, dass das lineare Funktional

$$T_y : \ell^p \to \mathbb{R}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

wohldefiniert und stetig ist und berechne seine Operatornorm.

(ii) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ mit $t_j \ne t_k$ für $j \ne k$. Seien außerdem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Untersuche das lineare Funktional

$$S : C([0,1]) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f(t_j)$$

auf Stetigkeit und berechne ggf. seine Operatornorm.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und T ein linearer, beschränkter Operator von X nach Y, d.h. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

(i) Sind der Kern $\ker T$ und das Bild $\operatorname{ran} T$ von T Untervektorräume von X bzw. Y? Sind sie abgeschlossen?

(ii) Existiert stets ein $x \in X$, $x \ne 0$, mit $\|Tx\| = \|T\|\|x\|$?

Gesamtpunktzahl: 20

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:

Zeige, dass der Operator

$$P : C([0,1]) \to \mathbb{K}, \quad f \mapsto f(0)$$

stetig ist und berechne seine Operatornorm.

Aufgabe 2:

Betrachte auf dem Raum a der abbrechenden Folgen in $\mathbb{K}$, ausgestattet mit der ℓ^∞-Norm, den linearen Operator

$$T : a \to \mathbb{K}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} j x_j.$$

Ist T beschränkt?

Aufgabe 3:

Wir statten den Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der rellen Polynome mit der Norm

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto \sup_{x\in[-1,1]} |p(x)|$$

aus. Betrachte zu jedem $x \in \mathbb{R}$ das *Punktauswertungsfunktional*[1] $f_x : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}, p \mapsto p(x)$.

(i) Zeige, dass f_x für jedes $x \in [-1,1]$ ein beschränktes lineares Funktional ist, und berechne $\|p_n\|$ für die Monome $p_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeige, dass für jedes x mit $|x| > 1$ das Funktional f_x unbeschränkt ist.

(iii) Sind die folgenden Operatoren beschränkt?

  (a) $S : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad p \mapsto p(\cdot - 1)$,
  (b) $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad p \mapsto p'$,
  (c) $I : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \quad (Ip)(x) := \int_{-1}^{x} p(t)\mathrm{d}t$.

Aufgabe 4:

Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Wir definieren

$$T : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X), \quad K \mapsto AKB.$$

Zeige, dass T linear und beschränkt mit Norm $\|T\| \le \|A\|\|B\|$ ist, also $T \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(X))$.

[1] Einen linearen Operator mit Werten in $\mathbb{K}$ nennt man auch lineares Funktional.