Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. K. Ammar, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
5. Übungsblatt

(Beschränkte lineare Operatoren, Neumannsche Reihe, Dualraum)

Abgabe vor den Tutorien am 26./27./28. Mai

Hausaufgaben

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Seien X ein normierter Raum und S, T lineare Operatoren in X, so dass die Gleichung

$$ST - TS = I$$

erfüllt ist. Zeige, dass mindestens einer der beiden Operatoren S bzw. T unbeschränkt ist.
(Hinweis: Zeige zunächst, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Formel $ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n$ gilt.)

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Löse die Integralgleichung

$$u(s) - \int_0^1 stu(t)\mathrm{d}t = \sin(\pi s), \quad s \in [0,1], u \in C([0,1]).$$

(Tipp: Neumannsche Reihe.)

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Die Menge der Eigenwerte von A sei mit $\sigma(A)$ bezeichnet. Der *Spektralradius* von A kann dann als

$$r(A) := \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

definiert werden.

(i) Zeige, dass $\|A\| = r(A)$ gilt.[1]

(ii) Beweise: $r(A) < 1 \iff \|A^n\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Zeige, dass der Dualraum des Raums c_0 der Nullfolgen isometrisch isomorph zu ℓ^1 ist, $c_0^* \cong \ell^1$.

Gesamtpunktzahl: 20

[1] Hier sei $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm und $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit der dadurch induzierten Operatornorm versehen.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:
Seien X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ ein Isomorphismus.[2] Sei weiter $B \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|I - A^{-1}B\| < 1$. Zeige, dass B invertierbar ist und

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|I - A^{-1}B\|}$$

gilt.

Aufgabe 2:
Auf $X = C([0,2])$ sei der Operator T gegeben durch

$$T : X \to X, \quad (Tf)(x) := \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \quad f \in X.$$

Zeige, dass $\|T\| = 2$ gilt. Beweise weiter, dass $I - T$ invertierbar ist.
Idee: Die Norm $\|f\|_\infty^g := \sup_{t\in[0,2]} e^{-2t}|f(t)|$ kann helfen.

Aufgabe 3:
Seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ linear. Zeige: T ist genau dann stetig, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ die Bildfolge $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt (in Y) ist.

Aufgabe 4:
Zeige, dass in jedem normierten Raum X mit $\dim X = \infty$ ein unstetiges lineares Funktional existiert.[3]

Aufgabe 5:
Es sei $X \neq \{0\}$ ein Banachraum und $L \in X^*$ ein beschränktes lineares Funktional auf X mit $L \neq 0$. Zeige, dass die Menge

$$Y = \{y \in X : L(y) = 1\}$$

nichtleer, abgeschlossen und konvex ist.

[2]Das bedeutet in der Funktionalanalysis, dass A bijektiv **und** A^{-1} wieder stetig ist.
[3]In jedem unendlichdimensionalen normierten Raum ist also der topologische Dualraum echt kleiner als der algebraische Dualraum.