Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. K. Ammar, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
6. Übungsblatt

(Reflexivität, Satz von Baire, Eigenwerte von linearen Operatoren)

Abgabe vor den Tutorien am 2./3./4. Juni

Hausaufgaben

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Es sei X ein reflexiver normierter Raum. Zeige:

(i) Für $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X^*$ gilt: $f_n \rightharpoonup f \in X^*$ genau dann, wenn $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$.

(ii) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so dass alle schwach konvergenten Teilfolgen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denselben Grenzwert x haben. Zeige, dass dann $x_n \rightharpoonup x$ gilt.

Grosse Ausnahme: Ihr dürft hier den in der Vorlesung noch nicht bewiesenen Satz verwenden, dass in einem reflexiven Raum jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge enthält.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Es seien X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ ein beschränkter linearer Operator, der *punktweise nilpotent ist*, d.h. zu jedem $x \in X$ existiert eine Zahl $n_x \in \mathbb{N}$ mit $A^{n_x}x = 0$. Zeige, dass A nilpotent ist: Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^n = 0$ gilt.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

(i) Nach Aufgabe 1 vom 4. Übungsblatt ist für $m = (m_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ der Operator

$$M : \ell^2 \to \ell^2, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

wohldefiniert und stetig mit $\|M\| = \|m\|_\infty$. Berechne die Eigenwerte und Eigenräume von M.[1] Gibt es einen Eigenwert von M mit $|\lambda| > \|M\|$?

(ii) Wir ersetzen nun die beschränkte Folge m in (i) durch die unbeschränkte Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$. Damit der Operator M wohldefiniert bleibt, müssen wir nun seinen Definitionsbereich einschränken zu

$$\operatorname{dom} M := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 : (n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \right\}.$$

Zeige, dass $\operatorname{dom} M$ ein echter Untervektorraum von ℓ^2 ist. Berechne wieder die Eigenwerte und Eigenräume des zugehörigen Operators M. Ist die Menge der Eigenwerte von M beschränkt? Ist der Operator M beschränkt?

[1] Eigenwerte und Eigenvektoren sind hier genau so erklärt wie in LinA: $x \neq 0$ ist Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, falls die Gleichung $Mx = \lambda x$ erfüllt ist. Dabei muss x aus dem Definitionsbereich von M stammen. (Falls M sowieso auf dem gesamten Raum definiert ist, bedeutet das natürlich keine Einschränkung.)

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zeige, dass keine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ existiert, die in allen rationalen Punkten aus $[0,1]$ stetig und in allen irrationalen Punkten aus $[0,1]$ unstetig ist.
REZEPTVORSCHLAG: Zeige zuerst, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen einer Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ immer Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen ist. Folgere dann mit dem Satz von Baire die Behauptung.

Gesamtpunktzahl: 20

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:

Sei X ein normierter Raum. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X, x_n \to x \Longrightarrow x_n \rightharpoonup x$.

(ii) Die Rückrichtung von (i) ist im Allgemeinen falsch.

(iii) $A \subseteq X$ heißt *schwach abgeschlossen*, falls aus $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A, x_n \rightharpoonup x$ folgt $x \in A$. Zeige, dass jede schwach abgeschlossene Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 2:

Es sei X ein normierter Raum. Zeige: Ist X reflexiv, so auch X^*.
BEMERKUNG: Die Umkehrung gilt auch, lässt sich allerdings mit unseren bisherigen Mitteln noch nicht beweisen. Aber das holen wir nach!

Aufgabe 3:

Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum. Zeige, dass jede Basis von X überabzählbar ist.
TIPP: Satz von Baire.

Aufgabe 4:

Zeige, dass der Vektorraum $\mathbb{R}[x]$ der reellen Polynome mit keiner Norm vollständig ist.

Aufgabe 5:

In den reellen Zahlen liegen sowohl die rationalen als auch die irrationalen Zahlen dicht, aber der Schnitt dieser beiden Mengen ist leer. Wieso ist das kein Widerspruch zum Satz von Baire?

Aufgabe 6:

Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

SATZ VON BAIRE 1.0
Seien X ein vollständiger metrischer Raum und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = X$. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$, so dass die Menge A_i einen inneren Punkt enthält.

SATZ VON BAIRE 1.0.1
Seien X ein vollständiger metrischer Raum und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von X, so dass $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ einen inneren Punkt enthält. Dann existiert ein $i \in \mathbb{N}$, so dass die Menge A_i einen inneren Punkt enthält.

SATZ VON BAIRE 2.0
Seien X ein vollständiger metrischer Raum und $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von offenen, dichten Teilmengen von X. Dann ist $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i$ dicht in X.