Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. K. Ammar, J. Rohleder

Sommersemester 2010

# Funktionalanalysis I
# 7. Übungsblatt

(Sätze von Banach–Steinhaus und von der offenen Abbildung)

Abgabe vor den Tutorien am 9./10./11. Juni

---

## Hausaufgaben

### Aufgabe 1: (5 Punkte)

Seien $X, Y$ Banachräume und $A : X \times Y \to \mathbb{K}$ bilinear und partiell stetig, d.h. für jedes $x \in X$ ist $A(x, \cdot)$ stetig und für jedes $y \in Y$ ist $A(\cdot, y)$ stetig. Zeige, dass $A$ stetig ist.

### Aufgabe 2: (5 Punkte)

Es seien $X$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum sowie $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf $X$, so dass $X$ mit beiden Normen vollständig ist. Die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ seien *koordiniert*, d.h. eine der folgenden Bedingungen ist erfüllt:

(a) Aus $\|x_n\|_1 \to 0$ und $\|x_n - x\|_2 \to 0$ folgt $x = 0$.

(b) Aus $\|x_n\|_2 \to 0$ und $\|x_n - x\|_1 \to 0$ folgt $x = 0$.

Zeige die folgenden Aussagen:

(i) Die Bedingungen (a) und (b) sind äquivalent.

(ii) Die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ sind äquivalent.

Hinweis: Betrachte die Norm $\|\cdot\|_{12} := \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$ auf $X$ und bringe den Satz von der offenen Abbildung zum Einsatz.

### Aufgabe 3: (5 Punkte)

Es sei $a$ der Raum der abbrechenden Folgen, ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, und

$$T : a \to a, \quad (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots).$$

Zeige, dass eine Folge stetiger Operatoren $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(a)$ existiert, die punktweise gegen $T$ konvergiert, dass aber $T$ nicht stetig ist. Warum widerspricht dies nicht der Aussage von Satz 2.2.2 aus der Vorlesung?

### Aufgabe 4: (5 Punkte)

Es sei $X$ ein reflexiver normierter Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge. Für jedes Funktional $f \in X^*$ konvergiere die Zahlenfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach konvergiert.
Tipp: Verwende den Satz von Banach–Steinhaus und die Hahn–Banach-Normenformel aus der Übung.

Gesamtpunktzahl: 20

## Tutoriumsvorschläge

### Aufgabe 1:
Sei $X$ ein normierter Raum und $M \subseteq X$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $M$ ist beschränkt.

(ii) Für alle $f \in X^*$ ist $f(M)$ beschränkt.

### Aufgabe 2:
Seien $X$ ein Banachraum und $M \subseteq X^*$ eine Teilmenge des Dualraums von $X$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $M$ ist beschränkt.

(ii) Für jedes $x \in X$ ist die Menge $\{f(x) : f \in M\}$ beschränkt.

### Aufgabe 3:
Seien $X, Y$ Banachräume und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(X,Y)$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = \infty$. Zeige: Es existiert ein $x \in X$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| = \infty$.

### Aufgabe 4:
Es seien $X, Y$ Banachräume und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Operatoren. Zeige: Falls die Folge $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und die Folge $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x$ aus einer dichten Teilmenge $D \subseteq X$ konvergiert, dann existiert ein stetiger Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx \quad \forall\, x \in D.$$

### Aufgabe 5:
Es seien $X, Y$ normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Zeige, dass $T$ genau dann stetig ist, wenn

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X, x_n \rightharpoonup x \in X \Longrightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$$

gilt.

### Aufgabe 6:
Finde normierte Vektorräume $X, Y$ und einen bijektiven Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, so dass $T^{-1}$ unbeschränkt ist. Wie verträgt sich das mit dem Satz von der offenen Abbildung?