TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
8. Übungsblatt

(Satz vom abgeschlossenen Graphen, abgeschlossene Operatoren)

Abgabe vor den Tutorien am 16./17./18. Juni

Hausaufgaben

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Seien X und Y Banachräume und $T : X \supseteq \operatorname{dom} T \to Y$ ein abgeschlossener linearer Operator.[1]

(i) Untersuche, ob der Kern

$$\ker T = \{x \in \operatorname{dom} T : Tx = 0\}$$

von T abgeschlossen in X bzw. das Bild $\operatorname{ran} T$ von T abgeschlossen in Y ist.

(ii) Sei nun $X = Y$. Zeige, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ der Operator $T - \lambda : X \supseteq \operatorname{dom} T \to Y$ abgeschlossen ist.[2]

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Es seien X, Y normierte Räume und $A : X \supseteq \operatorname{dom} A \to Y$ linear. Der Operator A heißt *abschließbar*, falls der Abschluss des Graphen $\Gamma(A)$ von A wieder der Graph eines Operators ist. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) A ist abschließbar.

(ii) Es existiert ein abgeschlossener linearer Operator $B : X \supseteq \operatorname{dom} B \to Y$ mit $\operatorname{dom} A \subseteq \operatorname{dom} B$ und $B \restriction \operatorname{dom} A = A$.[3]

(iii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \operatorname{dom} A$ mit $x_n \to 0$, so dass $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y konvergiert, gilt $\lim_{n\to\infty} Tx_n = 0$.

Folgere, dass jeder stetige lineare Operator abschließbar (jedoch, wie wir wissen, im Allgemeinen nicht abgeschlossen) ist. Finde außerdem ein Beispiel für einen linearen Operator, der nicht abschließbar ist.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar. Wir definieren den Unterraum $D \subseteq L^2(\mathbb{R})$ durch

$$D = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : gf \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

und den Operator T durch

$$T : L^2(\mathbb{R}) \supseteq D \to L^2(\mathbb{R}), \quad f \mapsto gf.$$

(i) Zeige, dass $\|(T-\lambda)f\|_2 \geq |\operatorname{Im} \lambda| \|f\|_2$ für alle $f \in D$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Zeige, dass der Operator $T - \lambda$ bijektiv und seine Inverse $(T-\lambda)^{-1}$ beschränkt ist. Berechne $(T-\lambda)^{-1}$ und zeige, dass $T - \lambda$ und T abgeschlossene Operatoren sind.

---

[1] Bei dieser Notation wird immer stillschweigend vorausgesetzt, dass der Definitionsbereich $\operatorname{dom} T$ von T ein Untervektorraum von X ist, denn anderenfalls ergibt die Forderung der Linearität von T keinen Sinn.

[2] Hier und in Zukunft steht $T - \lambda$ als Kurzform für den Operator $T - \lambda I$.

[3] Das Symbol $\restriction$ bedeutet die Einschränkung (auch *Restriktion*) eines linearen Operators auf einen Unterraum seines Definitionsbereichs.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

(i) Zeige, dass im Satz vom abgeschlossenen Graphen nicht auf die Vollständigkeit von X verzichtet werden kann.

(ii) Zeige, dass im Satz vom abgeschlossenen Graphen nicht auf die Vollständigkeit von Y verzichtet werden kann.

Gesamtpunktzahl: 20

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:

Seien X, Y normierte Räume, D ein Untervektorraum von X und $A : D \to Y$ ein linearer Operator.

(i) Sei $X = Y = \ell^2$ und A definiert als

$$A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (nx_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D,$$

wobei D gegeben sei durch

(a) $D = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2\}$ bzw.

(b) $D = a$

gegeben.[4] Ist jeweils A ein abgeschlossener Operator?

(ii) Sei $Ax = 0$ für alle $x \in D$. Ist A abgeschlossen?

(iii) Zeige: Ist A injektiv und abgeschlossen, so ist auch $A^{-1} : Y \supseteq \operatorname{ran} A \to X$ abgeschlossen.

Aufgabe 2:

Es seien X, Y und Z Banachräume, $T : X \to Y$ und $J : Y \to Z$ lineare Operatoren. Weiter seien J injektiv und stetig und $JT : X \to Z$ stetig. Zeige, dass auch T stetig ist.

Aufgabe 3:

Seien X und Y Banachräume und $T : X \supseteq \operatorname{dom} T \to Y$ ein linearer Operator. Zeige, dass aus je zwei der folgenden Aussagen die dritte folgt:

(i) T ist abgeschlossen.

(ii) T ist stetig.

(iii) $\operatorname{dom} T$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 4:

Eine Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen: Seien X, Y Banachräume und $A : X \to Y$ linear und unstetig. Dann ist der Abschluss $\overline{A}$ von A (definiert im Graphensinn) ein immer noch auf ganz X definierter, linearer Operator, der abgeschlossen ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist dann $\overline{A}$ stetig. Aber $\overline{A}$ stimmt mit A überein, da $\overline{A}$ eine Fortsetzung von A ist und A schon auf ganz X definiert war. Also ist A stetig. Folgerung: Jeder auf dem ganzen Raum definierte lineare Operator ist stetig.
DAS IST FALSCH! Wo ist der Fehler?

[4] Hier ist wieder a der Vektorraum der abbrechenden Folgen in $\mathbb{K}$.