Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
9. Übungsblatt
(Satz von Hahn–Banach)

Abgabe vor den Tutorien am 23./24./25. Juni

Hausaufgaben

Aufgabe 1: (4 Punkte)

Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein Unterraum von X. Zeige, dass

$$\overline{U} = \bigcap_{f \in X', U \subseteq \ker f} \ker f$$

gilt.[1]

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Sei X ein normierter Raum und $f : X \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional auf X. Zeige, dass $\ker f$ entweder abgeschlossen oder dicht in X ist.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ definieren wir $\phi_x \in (\ell^\infty)'$ durch

$$\phi_x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \quad y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty.$$

Zeige, dass ein $\phi \in (\ell^\infty)'$ existiert, das für kein $x \in \ell^1$ von der Form $\phi = \phi_x$ ist.[2]
Tipp: Satz von Hahn–Banach im Raum $c_0 \subseteq \ell^\infty$.

Aufgabe 4: (3 Punkte)

Es seien X ein normierter Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine beschränkte Folge. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann schwach gegen $x \in X$ konvergiert, $x_n \rightharpoonup x, n \to \infty$, wenn eine dichte Teilmenge $D \subseteq X'$ existiert, so dass $f(x_n) \to f(x)$, $n \to \infty$, für alle $f \in D$ gilt.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Es sei X ein separabler Banachraum. Zeige mit Hilfe des Satzes von Hahn–Banach, dass ein linearer, isometrischer Operator $T : X \to \ell^\infty$ existiert. Ist X dann isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Unterraum von ℓ^∞?

Gesamtpunktzahl: 20

---

[1] Um mit der Vorlesung im Einklang zu bleiben, bezeichnen wir ab sofort den (topologischen) Dualraum $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ eines normierten Raums X mit X'.
[2] Der Dualraum von ℓ^∞ ist also „größer" als ℓ^1.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:

Seien X ein normierter Raum, $U \subseteq X$ ein Unterraum von X und $f : U \to \mathbb{K}$ linear und stetig.

(i) Zeige, dass die Menge

$$\mathcal{L} := \{F \in X' : F \restriction U = f, \|F\| = \|f\|\}$$

konvex ist.

(ii) Es sei nun zusätzlich der Dualraum X' von X strikt konvex. Zeige, dass die Hahn–Banach-Fortsetzung $F \in X'$ von f eindeutig ist. Was bedeutet das für die Menge $\mathcal{L}$ aus (i)?

Aufgabe 2:

Seien X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ lineare Funktionale. Zeige: Es existiert genau dann ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, mit $f = \lambda g$, wenn $\ker f = \ker g$ gilt.

Aufgabe 3:

Seien X ein normierter Raum und $f : X \to \mathbb{K}$ linear. Zeige, dass $f \in X'$ genau dann gilt, wenn $\ker f$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 4:

Sei X ein normierter Raum. Zeige: Ein Untervektorraum $U \subseteq X$ ist genau dann schwach abgeschlossen,[3] wenn er abgeschlossen ist.

Aufgabe 5:

Sei X ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein Untervektorraum von X. Zeige: U ist genau dann dicht in X, wenn jedes lineare, stetige Funktional $f : U \to \mathbb{K}$ eine eindeutige stetige, lineare Fortsetzung auf ganz X besitzt.

[3] U heißt schwach abgeschlossen, wenn für jede schwach konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$ mit $x_n \rightharpoonup x \in X$ folgt, dass x in U liegt.