Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Behrndt, J. Rohleder

Sommersemester 2010

Funktionalanalysis I
12. Übungsblatt
(Hilberträume)

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1:
Zeige, dass die Menge $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ der Einheitsfolgen eine ONB in ℓ^2 ist.

Aufgabe 2:
Sei $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ ein Prä-Hilbertraum. Zeige, dass zwei Elemente $u, v \in \mathcal{H}$ genau dann orthogonal sind, wenn

$$\|u + \lambda v\| = \|u - \lambda v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

gilt.

Aufgabe 3:
Seien $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{G}$ Hilberträume, $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $R \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{G})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) $(S + T)^* = S^* + T^*$ und $(\lambda S)^* = \bar{\lambda} S^*$.

(ii) $(RS)^* = S^* R^*$.

(iii) $(S^*)^* = S$.

Aufgabe 4:
Zeige die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Hellinger–Toeplitz: Seien $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $S, T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineare Operatoren mit

$$(Tu, v) = (u, Sv) \quad \forall u, v \in \mathcal{H}.$$

Dann sind S und T stetig und es gilt $S = T^*$.

Aufgabe 5:
Betrachte den Operator

$$A : L^2([0,1]) \to L^2([0,1]), \quad (Af)(t) = tf(t), \quad t \in [0,1].$$

Zeige, dass A stetig und selbstadjungiert ist. Bestimme die Menge $\sigma_p(A)$ der Eigenwerte von A.[1] Ist A kompakt?[2]

---

[1] Die Menge $\sigma_p(A)$ heißt auch das *Punktspektrum* von A.
[2] Dies ist die letzte Fußnote für dieses Semester. ;-)